

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА И ТЕПЛООБМЕН

I

Computational fluid mechanics and heat transfer

Dale A. Anderson

Professor of Aerospace Engineering
Iowa State University

John C. Tannehill

Professor of Aerospace Engineering
Iowa State University

Richard H. Pletcher

Professor of Mechanical Engineering
Iowa State University

Hemisphere Publishing Corporation, New York
A subsidiary of Harper & Row, Publishers, Inc.
Cambridge · Philadelphia · San Francisco · Washington
London · Mexico City · São Paulo · Singapore · Sydney

Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА И ТЕПЛООБМЕН

В двух томах

Том 1

Перевод с английского
С. В. Сенина и Е. Ю. Шальмана
под редакцией
Г. Л. Подвидза



Москва «Мир» 1990

ББК 22.253

A65

УДК 532 + 681.3

Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.

A65 Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т.
Т. 1: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 384 с., ил.

ISBN 5-03-001927-8

Книга учебного типа, написанная известными американскими специалистами. В ней поставлена цель — научить читателя составлять конечно-разностные алгоритмы решения гидро- и газодинамических задач. Структура книги тщательно продумана и позволяет практически освоить методику численного решения сложнейших задач гидродинамики и теплообмена. Этому способствуют тщательно подобранные примеры и уникальные наборы задач в конце каждой главы. В русском издании книга выходит в двух томах.

Для математиков-прикладников, инженеров-вычислителей, специалистов по механике жидкостей, аспирантов и студентов вузов.

A $\frac{1602120000-149}{041(01)-90}$ 28—90

ББК 22.253

Редакция литературы по математическим наукам

Научное издание

Дейл Андерсон, Джон Таннехилл, Ричард Плетчер

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА И ТЕПЛОБМЕН

В двух томах. Т. 1

Заведующий редакцией чл.-корр. АН СССР В. И. Арнольд. Зам. зав. редакцией А. С. Попов. Ст. научн. редактор П. Я. Корсоюцкая. Мл. научн. редактор Р. И. Пяткина. Художник М. Н. Кузьмина. Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор А. Л. Гулина. Корректор Н. А. Гиря

ИБ № 7157

Сдано в набор 02.06.89. Подписано к печати 04.12.89. Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 2. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 12,00 бум. л. Усл. печ. л. 24,00. Усл. кр.-отт. 24,00. Уч.-изд. л. 21,67. Изд. № 1/6517, Тираж 7800 экз. Зак. 198. Цена 1 р. 80 к.

Издательство «МИР» В/О «Совэксспорткнига» Государственного комитета СССР по печати. 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Набрано в Ленинградской типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 198052, г Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29. Отпечатано в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 191126. Ленинград, Социалистическая ул., 14.

ISBN 5-03-001927-8 (русск.)

ISBN 5-03-001926-X

ISBN 0-89116-471-5 (англ.)

© 1984 by Hemisphere Publshing Corporation

© перевод на русский язык. С. В. Сенин, Е. Ю. Шальман, 1990

Предисловие к русскому изданию

Вычислительная гидромеханика — быстро развивающееся направление механики жидкости и газа. Данная книга является монографией учебного типа, в которой обобщается опыт применения современных конечно-разностных методов решения задач гидродинамики и теплопередачи. Она написана известными учеными, работающими в области теоретической и прикладной газовой динамики и аэрокосмической техники.

В части 1 книги изложены основы конечно-разностных методов и описаны наиболее распространенные разностные схемы решения уравнений в частных производных. При постановке начальных и граничных условий задач учитывается ориентация характеристик исходной системы уравнений. Рассмотрены маршевые (или эволюционные) задачи, решение которых находится последовательным продвижением в направлении маршевой переменной. В нестационарных течениях газа такой переменной служит время, а в стационарных сверхзвуковых течениях — пространственная координата, проекция скорости на которую оказывается сверхзвуковой. Приведены неявные разностные схемы, основанные на расщеплении матриц коэффициентов конвективных операторов уравнений на верхнюю и нижнюю треугольные матрицы и схемы расщепления для многомерных задач. Выполнен анализ соответствия исходного уравнения в частных производных с дифференциальным приближением его разностного уравнения.

В части 2 книги наряду с исходными уравнениями течения невязкого и вязкого газа дано описание математических моделей турбулентности в объеме, необходимом для решения прикладных задач. Для течения невязкого газа рассмотрены различные схемы сквозного счета и схемы, предусматривающие явное построение скачков уплотнения. Для уравнений «погранслоного» типа описаны различные способы линеаризации и приведены разностные схемы расчета трехмерного пограничного слоя. Представляет интерес изложение обратного метода, применяемого для расчета отрывных течений с тонкими рециркуляционными областями.

Для трехмерных уравнений Навье — Стокса в газе описаны наиболее распространенные в зарубежных работах схемы: явная

двухшаговая схема Мак-Кормака, имеющая ограничение на шаг интегрирования и поэтому требующая при решении стационарных задач методом установления больших затрат времени счета на ЭВМ, и его же неявная схема, устраняющая ограничение на шаг по времени, а также неявная схема Бима — Уорминга, в которой применена линеаризация конвективных и вязких членов.

Большое внимание уделено построению разностных сеток для областей сложной формы с отображением области течения в физической плоскости в простую каноническую область, покрытую ортогональной сеткой. Рассмотрены сетки, адаптированные к скачку уплотнения и благодаря этому существенно повышающие точность решения.

Книга написана на высоком научном уровне. Приведенные в ней примеры отражают состояние вычислительной гидродинамики последнего десятилетия и представляют интерес для специалистов, занимающихся ее применением к объектам аэрокосмической техники и энергомашиностроения, а также к другим приложениям. Большая часть примеров посвящена газодинамическим задачам.

В список дополнительной литературы, включенный в русское издание, вошли монографии по теоретической гидродинамике [1, 5, 16, 18, 19, 30, 36], теплообмену [22] и методам вычислений отечественных авторов [7, 8, 13, 20, 25, 28, 33, 38, 40], а также отдельные переведенные на русский язык монографии зарубежных авторов [23, 29, 34, 35, 39]. Среди последних отметим монографию П. Роуча «Вычислительная гидродинамика» (М.: Мир, 1980), которая по тематике близка данной, но отражает мировой уровень развития вычислительной гидромеханики двадцатилетней давности. В последнее время в зарубежной литературе появились работы по многосеточным подходам, расчету пространственных отрывных течений, расчету турбулентных течений с низкими числами Рейнольдса. Ряд таких работ, также попавших в этот список, переведен в журнале «Аэрокосмическая техника» [10, 21, 26]. Наконец, хотелось бы отметить, что вне поля зрения авторов предлагаемой книги оказалась «распадная» схема С. К. Годунова и ее явные и неявные модификации повышенной точности, с которой читатель может ознакомиться в работах [2, 3, 4, 6, 11, 12, 14, 15, 17, 27, 31, 32].

Книга будет полезна многим научным работникам и инженерам, а также аспирантам и студентам вузов.

Работа над переводом была распределена следующим образом: предисловие, гл. 1—4, 7 и приложения перевел Е. Ю. Шальман, а гл. 5, 6, 8—10 — С. В. Сенин. Русское издание выходит по заказу ЦИАМ им. П. И. Баранова.

*А. Н. Крайко
Г. Л. Подвидз*

Посвящается нашим женам и детям: Марлин, Грегу и Лизе Андерсонам, Марсии, Мичеллу и Джону Таннехиллам, Кэрол, Дугласу, Лауре, Цинтии Плетчерам

Предисловие

Предлагаемая книга является учебным пособием по курсу вычислительной механики жидкости и теплообмена (или просто вычислительной гидродинамики), предназначенному для студентов старших курсов и аспирантов. В ее основу положены заметки, подготовленные для читавшихся один за другим двух курсов лекций. Эти курсы преподавались в Университете шт. Айова в течение более десяти лет. Книга не претендует на всестороннее освещение рассматриваемой проблемы, но мы надеемся, что она может служить введением в вычислительную гидродинамику для начинающих. Большая часть книги посвящена применению конечно-разностных методов.

Материал книги разбит на две части. В первой части, состоящей из гл. 1—4, изложены основные понятия и основы методов конечных разностей. Вторая часть, состоящая из гл. 5—10, посвящена применению этих методов для решения уравнений гидромеханики и теплообмена. Глава 1 служит введением, а основные сведения из теории уравнений в частных производных приведены в гл. 2. Конечно-разностные методы и вопросы устойчивости, аппроксимации и сходимости разностных схем обсуждены в гл. 3.

В гл. 4 приведен, возможно, наиболее важный для этой книги материал. Множество различных конечно-разностных методов применено к решению линейных и нелинейных модельных уравнений в частных производных. Так как аналитическое решение модельных уравнений известно, то можно понять, к каким результатам приводит применение различных численных методов для решения одной и той же задачи.

Предполагая, что читатель хоть немного знаком с гидромеханикой и теплообменом, в гл. 5 авторы дают обзор основных уравнений и выписывают их различные формы, наиболее удобные для численного моделирования. В эту же главу включен раздел, посвященный моделированию турбулентности. Методы расчета невязких течений, основанные на решении уравнений, записанных в дивергентном и недивергентном видах, описаны в гл. 6. Методы расчета ламинарных и турбулентных пограничных

слоев рассмотрены в гл. 7. Глава 8 посвящена классу уравнений, названных параболизированными уравнениями Навье—Стокса, которые полезны в тех случаях, когда течение не адекватно описывается уравнениями пограничного слоя, но может быть изучено в рамках более простых уравнений, чем полные уравнения Навье—Стокса. Кроме того, в гл. 8 рассмотрены дозвуковые и сверхзвуковые течения как при внешнем обтекании тел, так и в ограниченных областях. Глава 9 посвящена методам решения полных уравнений Навье—Стокса, в том числе и осредненных по Рейнольдсу (уравнений Рейнольдса). Завершает книгу краткое введение в методы построения разностных сеток, которому посвящена гл. 10.

В Университете шт. Айова изложенный в книге материал использовался в основном для обучения студентов аэрокосмических и механических специальностей, хотя к ним часто добавлялись студенты, изучающие другие инженерные специальности и науки о Земле. Наш опыт показывает, что часть 1 книги (гл. 1—4) может быть изучена в рамках односеместрового курса. Часть 2 книги содержит куда больше информации, чем может быть включено в такой курс, поэтому ее материал можно использовать в различных курсах. И хотя мы обнаружили, что большая часть материала, приведенного в каждой из гл. 5—10, может быть изложена студентам за один семестр, вполне возможно на основе этого материала создать специальные курсы. Наиболее очевидным вариантом является использование гл. 5, 6 и 10 для курса, посвященного невязким течениям, и гл. 5, 7—9 и, возможно, 10 для курса, посвященного вязким течениям. Существуют, конечно, и другие комбинации. Если по теме этой книги предполагается читать лишь один учебный курс, то и в этом случае поступить можно по-разному: либо изложить подробно только первую часть книги, либо изложить лишь часть материала гл. 1—4, дополнив его некоторыми представляющими специальный интерес материалами из части 2. Материал этой книги в достаточной степени разграничен, поэтому он может быть использован в учебных курсах, читающихся с разными целями.

Изложенный в книге материал предполагает знакомство студентов по меньшей мере с одним курсом по гидромеханике, курсом обыкновенных дифференциальных уравнений, а также с теорией уравнений в частных производных. Кроме того, конечно, предполагается некоторый опыт в программировании.

Курс лекций, читавшихся в Университете шт. Айова, методологически был составлен так, чтобы студенты могли самостоятельно разрабатывать программы. Поэтому в книге нет описания готовых программ, предназначенных для решения специальных

задач. В конце каждой главы приведены задачи, целью которых является численная реализация изложенного в книге материала. При этом предполагается, что студенты имеют доступ к быстродействующим ЭВМ.

Мы хотим поблагодарить за сотрудничество всех наших бывших и нынешних студентов. Авторы многим обязаны Ф. Блоттнеру, С. Чакраварти, Ж. Кристофу, Дж. Дейуитту, Т. Холсту, М. Хуссаини, Дж. Йевалтсу, Д. Джесперсену, О. Квону, М. Малику, Дж. Ракичу, М. Саласу, В. Шанкару, Р. Уормингу и др. за полезные предложения по улучшению текста книги. Мы хотели бы также поблагодарить г-жу Пэт Фокс и ее помощников за искусно подготовленные иллюстрации. Особо мы благодарны Шерли Райни, которая отпечатала и отредактировала весь текст. Ее усилия постоянно воодушевляли нас. Мы в большом долгу перед нашими женами и детьми за все те часы, которые мы украли у них. Их терпение должно быть оценено очень высоко.

В заключение несколько слов о порядке расположения авторов. Эта книга — наш коллективный труд, среди нас нет «старших» и «младших», поэтому порядок был определен подбрасыванием монеты. То есть, несмотря на то что книга посвящена конечно-разностным методам, этот вопрос был решен методом Монте-Карло.

*Дэйл Андерсон
Джон Таннехилл
Ричард Плетчер*

ОСНОВЫ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Глава 1 Введение

§ 1.1. Общие замечания

Появление быстродействующих ЭВМ резко изменило характер применения основных принципов теоретической гидромеханики и теплопередачи при решении инженерных задач. Задачи, которые сейчас с малыми затратами решаются на ЭВМ за несколько секунд, всего 20 лет назад известными в то время численными методами на существовавших ЭВМ могли быть решены лишь за несколько лет. Мощные ЭВМ, о возможности появления которых никто и не думал, привели к многочисленным изменениям. В первую очередь эти изменения стали заметны в промышленности и научно-исследовательских лабораториях, т. е. там, где выше всего была потребность в решении сложных задач. В последнее время изменения, вызванные компьютерами, проявились в университетских аудиториях, где студентов стали обучать основам наук, необходимых для успешного использования вычислительной техники. Мы надеемся, что предлагаемая книга поможет организовать обучение и шире распространить информацию о новых научных достижениях.

Мы были свидетелями резкого роста роли и значения нового подхода к решению задач гидродинамики и теплообмена, который получил название *вычислительной гидромеханики*. Основной особенностью этого вычислительного (или численного) подхода является то, что уравнения (чаще всего уравнения в частных производных), описывающие интересующий нас физический процесс, решаются численно. Некоторые идеи такого под-

хода известны довольно давно. Разработка численных методов, в первую очередь конечно-разностных, решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, началась уже в начале двадцатого века. Изобретенный в конце 1930-х гг. Атанасовым механический арифмометр (см. [Gardner, 1982]) почти сразу стал использоваться для решения задач гидромеханики. Однако он существенно не повлиял на методику решения инженерных задач. Взрыв в применении численных методов наступил лишь после того, как в 1960-х гг. появилась третья составляющая, необходимая для применения численного подхода, — широко доступные быстродействующие ЭВМ.

Традиционно при проектировании летательных аппаратов совместно использовались и теоретический, и экспериментальный методы, с помощью которых определялись гидродинамические и тепловые характеристики. С появлением быстродействующих ЭВМ стало возможным применять третий подход — вычислительный. Несмотря на то что эксперимент по-прежнему играет очень важную роль, особенно при исследовании сложных течений, в процессе проектирования отчетливо проявляется тенденция ко все более широкому использованию вычислительного подхода.

Эта тенденция во многом связана с соображениями экономии [Charman, 1979]. За последние годы быстродействие ЭВМ возрастало быстрее, чем их стоимость, вследствие этого стоимость заданного расчета фантастически уменьшилась. Из представленных на рис. 1.1 данных видно, что стоимость заданного расчета уменьшается в десять раз каждые восемь лет. Такой характер изменения стоимости расчетов связан с использованием самых лучших ЭВМ, хотя, конечно, далеко не каждый пользователь имеет доступ к самым современным ЭВМ. Удешевление оказывается еще более значительным, если учесть развитие численных методов. Прочитируем один яркий пример из книги Чепмена [Charman, 1979], иллюстрирующий рост эффективности вычислений: «Численный расчет обтекания крылового профиля на основе уравнений Рейнольдса может быть проведен на современных супер-ЭВМ менее чем за полчаса, стоимость машинного времени при этом не превышает 1000 долл. Если бы кто-то попытался провести такие расчеты 20 лет назад на существовавших в то время ЭВМ (например, на ЭВМ класса IBM-704) по известным в то время алгоритмам, то стоимость такого расчета составила бы примерно 10 млн. долл., а расчет этого одного течения закончился бы лишь еще через десять лет, так как время решения задачи составило бы около 30 лет». Ожидается, что тенденция к снижению стоимости расчета сохранится и в будущем

в течение некоторого времени. Стоимость же проведения экспериментов в последние годы неуклонно растет.

Мы не думаем, что при проектировании численные методы в ближайшее время полностью заменят экспериментальные, но верим, что в будущем численные методы будут применяться шире. В большинстве случаев при анализе гидродинамических течений и теплообмена в интересующих проектировщиков ситуациях сохранится необходимость проведения экспериментов. Однако численные расчеты можно использовать для уменьшения

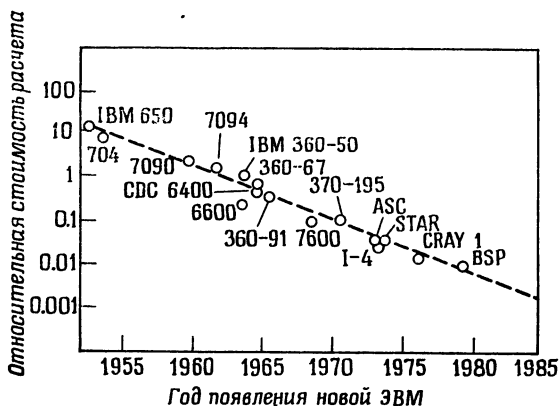


Рис. 1. Тенденция изменения относительной стоимости расчета одного и того же течения по одному и тому же алгоритму [Шарпан, 1979]; штриховой линией показано, что стоимость расчета уменьшается в 10 раз каждые 8 лет.

диапазона значений параметров, при которых проводятся эксперименты. Экспериментальные исследования будут, вероятно, еще какое-то время необходимы в приложениях, если нужно получить информацию о турбулентных течениях, так как для описания таких течений в настоящее время экономически невозможно использовать модели, свободные от эмпирической информации. В приложениях, связанных с течением многофазных сред, кипением или конденсацией, особенно в сложных геометрических конфигурациях, экспериментальные методы играют ведущую роль при получении необходимой для проектирования информации. В развитии вычислительных моделей для таких течений замечен некоторый прогресс, однако работы в этой области находятся пока на довольно низком уровне по сравнению с существующими методами расчета внешнего обтекания аэродинамических тел однофазным ламинарным потоком.

§ 1.2. Сравнение экспериментального, теоретического и вычислительного подходов

В предыдущем параграфе уже отмечалось, что для решения задач гидродинамики и теплообмена используются три различных подхода: 1) экспериментальный, 2) теоретический, 3) численный (вычислительная гидромеханика). Теоретический подход часто называют *аналитическим*, термины же *численный* и *вычислительный* взаимозаменяемы. Для иллюстрации применения этих трех подходов к решению задач гидромеханики рассмотрим классическую задачу определения распределения давления по передней поверхности кругового цилиндра, обтекаемого равномерным потоком, при числе Маха M_∞ , равном четырем, и числе Рейнольдса (определенном по диаметру цилиндра), равном $5 \cdot 10^6$.

Если используется экспериментальный подход, то сначала надо спроектировать и изготовить модель кругового цилиндра. В этой модели должна быть предусмотрена возможность измерения давления на стенке, а также возможность установки ее в аэродинамической трубе. Аэродинамическая труба должна позволять получать в рабочей части необходимые для моделирования набегающего потока параметры. Создать в аэродинамической трубе необходимые условия часто довольно трудно, особенно при испытании уменьшенных моделей больших самолетов и космических аппаратов. После того как модель изготовлена, а аэродинамическая труба выбрана, можно приступить непосредственно к экспериментальному исследованию. Так как при работе аэродинамической трубы потребляется большое количество энергии, то время проведения эксперимента должно быть сведено к минимуму. Эффективное использование времени работы аэродинамической трубы стало особенно важным в последнее время в связи с ростом стоимости энергии. После проведения экспериментов необходимо по известным коэффициентам провести коррекцию измеренных значений для окончательного определения распределения давления на стенке. Экспериментальный подход позволяет найти наиболее близкие к действительности решения многих гидромеханических задач, однако его стоимость растет с каждым днем.

При использовании теоретического подхода делаются некоторые упрощающие предположения, что и позволяет найти решение задачи по возможности в замкнутом виде. В рассматриваемой нами задаче полезной аппроксимацией является *теория Ньютона* (см. [Hayes, Probst, 1966]) для совершенного газа. Согласно теории Ньютона, ударный слой (область между телом и ударной волной) полагается бесконечно тонким, поэтому

головная ударная волна прилегает непосредственно к поверхности тела (рис. 1.2(a)). Следовательно, в этом случае нормальная к поверхности тела скорость потока за ударной волной равна нулю, так как газ сразу «ударяется» о поверхность тела. Закон сохранения импульса в направлении, нормальном к ударной волне (см. гл. 5), можно записать в виде

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (1.1)$$

где p — давление, ρ — плотность, u — нормальная составляющая скорости, а индексами 1 и 2 обозначены значения параметров

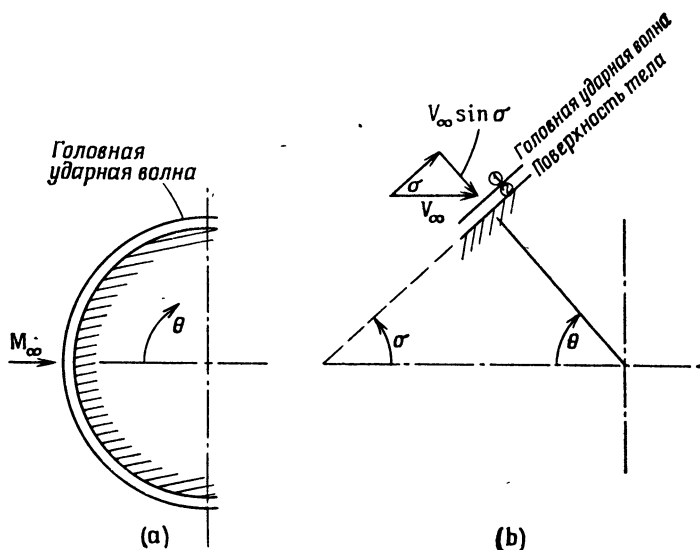


Рис. 1.2. Теоретический подход. (а) Теория Ньютона; (б) геометрические параметры для расчета ударной волны.

непосредственно перед и за скачком соответственно. Для рассматриваемой задачи (рис. 1.2(b)) уравнение (1.1) примет вид

$$p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \sigma = p_w + \rho_w \underbrace{u_w^2}_0, \quad (1.2)$$

давление на стенке p_w равно

$$p_w = p_\infty \left(1 + \frac{\rho_\infty}{\rho_w} V_\infty^2 \sin^2 \sigma \right). \quad (1.3)$$

Для совершенного газа скорость звука в набегающем потоке определяется соотношением

$$a_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}, \quad (1.4)$$

где $\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей. Используя определение числа Маха

$$M_\infty = V_\infty/a_\infty \quad (1.5)$$

и тригонометрическое тождество (см. рис. 1.2(b))

$$\cos \theta = \sin \sigma, \quad (1.6)$$

получим из уравнений (1.1) — (1.3)

$$p_w = p_\infty (1 + \gamma M_\infty^2 \cos^2 \theta). \quad (1.7)$$

В критической точке $\theta = 0^\circ$ и давление на стенке равно

$$p_s = p_\infty (1 + \gamma M_\infty^2). \quad (1.8)$$

Подставляя выражение для давления в критической точке в (1.7), окончательно получаем

$$p_w = p_\infty + (p_s - p_\infty) \cos^2 \theta. \quad (1.9)$$

Точность использованного теоретического подхода можно существенно улучшить, если вместо соотношения (1.8) для определения давления в критической точке p_s воспользоваться формулой Рэлея для масадка полного давления [Shapiro, 1953]

$$p_s = p_\infty \left[\frac{(\gamma + 1) M_\infty^2}{2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_\infty^2 - (\gamma - 1)} \right]^{1/(\gamma-1)}, \quad (1.10)$$

которая получена в предположении, что между ударной волной и поверхностью тела происходит изэнтропическое сжатие вдоль критической линии тока. Совместное использование соотношений (1.9) и (1.10) называют *модифицированной теорией Ньютона*. Предсказываемое этой теорией распределение давления сопоставлено на рис. 1.3 с полученным при экспериментальном подходе [Beckwith, Gallagher, 1961]. Отметим, что рассчитанные и измеренные значения удовлетворительно согласуются между собой вплоть до углов $\theta = \pm 35^\circ$. Большим преимуществом теоретического подхода является то, что с его помощью можно получить «чистую» и довольно обширную информацию, причем во многих случаях на основе довольно простых формул. Этот подход особенно полезен на этапе предварительного проектирования, так как он позволяет за минимальное время получить разумные ответы на возникающие вопросы.

При использовании численного подхода делается ограниченное количество предположений, а получающаяся в результате система уравнений газовой динамики решается численно на быстродействующей ЭВМ. Для рассматриваемого течения (рис. 1.2) при больших числах Рейнольдса можно ограничиться

анализом обтекания невязким газом, так как мы хотим определить лишь распределение давления по передней поверхности цилиндра. Следовательно, наиболее подходящими для описания течения являются уравнения Эйлера, которые мы и выберем в качестве исходной системы газодинамических уравнений. Для решения этих уравнений необходимо сначала построить расчетную сетку в области между ударной волной и телом, как показано на рис. 1.4. Входящие в нестационарные уравнения Эйлера частные производные аппроксимируются в каждом узле сетки

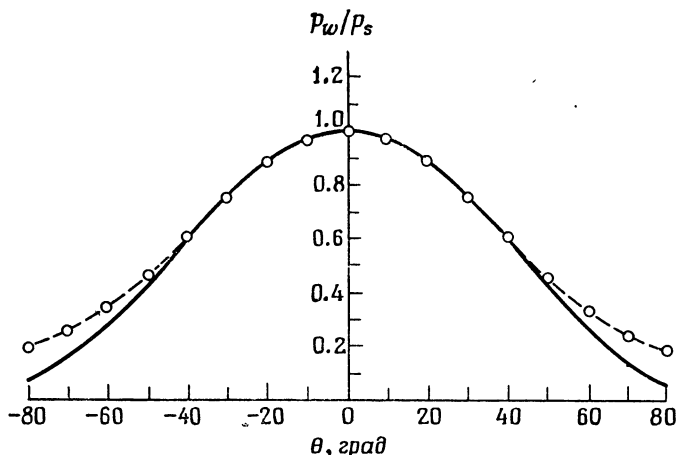


Рис 1.3. Распределение давления по поверхности кругового цилиндра; \circ экспериментальное; — теоретическое; - - - численное.

подходящими конечно-разностными выражениями. Полученные уравнения интегрируются по времени до тех пор, пока после некоторого достаточного числа шагов не выработается асимптотическое стационарное решение. Подробно этот подход будет рассмотрен в последующих главах книги. Получающиеся результаты [Daywitt, Anderson, 1974] показаны на рис. 1.3. Отметим, что они прекрасно совпадают с экспериментальными данными.

Сравнивая различные подходы, заметим, что численные методы свободны от ряда ограничений, накладываемых на экспериментальные методы для получения исходной для проектирования информации. В этом главное преимущество численных методов, которое в дальнейшем будет еще более важно. Идея экспериментального исследования состоит в получении требуемых характеристик на относительно дешевой небольшой модели

реального устройства. Однако, проводя такие исследования, не всегда удается смоделировать реальные условия работы прототипа на существующих экспериментальных установках. Например, сложно смоделировать большие числа Рейнольдса для летящего самолета, условия при входе в атмосферу или строгие условия, возникающие на некоторых рабочих режимах в турбомашинах. Отсюда следует, что численные методы, не имеющие таких ограничений, позволяют получать информацию, которую другими методами найти невозможно.

С другой стороны, применение численных методов также ограничено, в первую очередь быстродействием и памятью ЭВМ. Еще одно ограничение на применение этих методов связано с нашей неспособностью понять и математически смоделировать некоторые сложные явления. Ни одно из этих ограничений на возможность применения численных методов не является принципиально непреодолимым, а существующие в настоящее время тенденции позволяют строить оптимистические прогнозы о роли вычислительных методов в будущем. Из представленных на рис. 1.1 данных видно, что относительная стоимость расчета одного и того же течения уменьшилась за последние двадцать лет на три порядка; по-видимому, эта тенденция сохранится в ближайшем будущем. Многие верят, что когда-нибудь аэродинамические трубы будут играть второстепенную роль по отношению к ЭВМ, так же как сейчас баллистические испытания играют второстепенную роль по отношению к расчетам при анализе траекторий (Charman, 1975).

Некоторые преимущества и недостатки всех трех рассмотренных подходов показаны в табл. 1.1. В заключение следует заметить, что в некоторых ситуациях сложно провести границу между различными подходами. Например, модели турбулентной вязкости, которые обычно используются в расчетах, получаются на основе анализа результатов измерений. Аналогично многие теоретические методы, которые требуют численных расчетов, могут быть отнесены к численным методам.

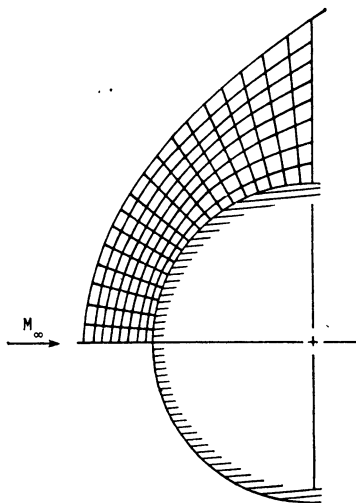


Рис. 1.4. Расчетная сетка.

Таблица 1.1. Сравнение различных подходов

Подход	Преимущества	Недостатки
Экспериментальный	1. Получение наиболее близких к реальности результатов	1. Сложное оборудование 2. Проблемы моделирования 3. Коррекция измеренных значений 4. Сложность измерений 5. Стоимость
Теоретический	1. Получение «чистой» информации общего характера, обычно в виде формул	1. Ограничен простыми геометрическими конфигурациями и физическими моделями 2. Обычно применим лишь к линейным задачам
Численный	1. Нет ограничений, связанных с линейностью 2. Описание сложных физических процессов 3. Описание эволюции течения во времени	1. Погрешности округления 2. Проблема задания граничных условий 3. Стоимость ЭВМ

§ 1.3. Исторический обзор

Естественно, что история вычислительной гидромеханики тесно связана с историей развития ЭВМ. До конца второй мировой войны большинство задач решалось аналитическими и эмпирическими методами. До этого времени лишь отдельные пионеры применяли численные методы для решения задач. Расчеты выполнялись вручную и каждое отдельное решение получалось в результате очень большой по объему работы. С тех пор как были созданы ЭВМ, рутинная работа, связанная с получением результатов при численном решении, проводится довольно просто.

Когда появилась вычислительная гидромеханика или когда были созданы методы, которые можно без сомнения отнести к методам вычислительной гидромеханики, можно лишь предполагать. Большинство считает, что первой значительной работой в этом направлении была работа Ричардсона [Richardson, 1910], где была предложена итерационная схема решения уравнения Лапласа и бигармонического уравнения. Ричардсон провел вычисления для определения напряжений в каменной дамбе. Кроме того, он четко сформулировал различия между задачами, которые надо решать *релаксационными* методами, и задачами, которые мы называем *маршевыми*.

Ричардсон разработал релаксационный метод решения уравнения Лапласа. В этом методе все величины на новой итерации

вычисляются по значениям неизвестных на предыдущей итерации. В 1918 г. Либман предложил улучшенный вариант метода Ричардсона. В методе Либмана при каждом проходе разностной сетки используются значения неизвестных как на предыдущей, так и на текущей итерациях. Эта простая процедура «непрерывного замещения» неизвестной позволяет существенно уменьшить количество итераций, необходимых для решения уравнения Лапласа. Методы Ричардсона и Либмана часто приводят в элементарных курсах теплопередачи для того, чтобы показать, как небольшое изменение численного метода может существенно повысить его эффективность.

Иногда начало современного численного анализа (вычислительной математики) связывают с появлением знаменитой работы Куранта, Фридрихса и Леви [Courant, Friedrichs, Lewy, 1928]. Часто встречающаяся в литературе аббревиатура КФЛ заменяет фамилии этих авторов. В их работе были поставлены вопросы о существовании и единственности решения уравнений в частных производных. Об огромной роли этой работы свидетельствует ее повторное опубликование в журнале *IBM Journal of Research and Development* в 1967 г. В этой работе впервые сформулировано условие КФЛ устойчивости разностных схем, используемых для численного решения уравнений в частных производных гиперболического типа.

В 1940 г. Саусвелл [Southwell, 1940] предложил релаксационную схему, которая широко использовалась при решении задач гидромеханики и строительной механики в тех случаях, когда требовалось улучшить сходимость релаксационной схемы. Его метод был создан для расчетов, проводимых вручную. Для применения его необходимо вычислить невязку во всех узлах разностной сетки и найти ее наибольшее значение. На следующем шаге релаксация начинается с узла, в котором невязка максимальна. В течение двух десятилетий на протяжении 1940-х и 1950-х гг. метод Саусвелла был первым численным методом, с которого студенты инженерных специальностей начинали изучение численных методов. В 1955 г. Аллен и Саусвелл [Allen, Southwell, 1955] применили метод Саусвелла к решению задачи об обтекании цилиндра несжимаемой вязкой жидкостью. Решение было найдено вручную, что связано с проведением очень большой вычислительной работы. Полученные результаты дали дополнительную информацию о вязких течениях, первые результаты для которых начали появляться с середины 30-х годов.

В течение второй мировой войны и сразу после ее окончания многие исследования были посвящены применению численных методов к решению задач гидромеханики. Именно в эти годы

проф. фон Нейман создал свой метод анализа устойчивости разностных схем решения нестационарных (маршевых по времени) задач. Интересно, что Нейман в полном объеме свой метод не опубликовал. Метод Неймана был несколько позже подробно изложен в работе [O'Brien, Numan, Kaplan, 1950]. Последняя работа чрезвычайно важна, так как в ней описан практический метод анализа устойчивости, который понятен инженерам и научным работникам и мог быть ими использован. Метод Неймана — наиболее широко применяемый в вычислительной гидромеханике метод анализа устойчивости разностных схем. Примерно в то же время была опубликована статья Лакса [Lax, 1954]. Лакс разработал метод расчета газодинамических течений с ударными волнами, которые являются поверхностями разрыва газодинамических параметров. При этом для расчета ударных волн не требовалось задание каких-то дополнительных условий. Такие свойства схемы Лакса были обусловлены использованием дифференциальных уравнений, записанных в дивергентной форме.

Параллельно развивались методы решения эллиптических и параболических уравнений. Франкел [Frankel, 1950] предложил первый вариант метода последовательной верхней релаксации для решения уравнения Лапласа, который позволил существенно улучшить скорость сходимости численных методов. Писмен и Ракфорд [Peaceman, Rachford, 1955], Дуглас и Ракфорд [Douglas, Rachford, 1956] предложили новый класс неявных методов решения параболических и эллиптических уравнений, которые назвали *неявными методами переменных направлений*. При использовании этих методов шаг по времени не ограничен; они широко используются и в настоящее время.

Книги, посвященные отдельным вопросам вычислительной гидромеханики, начали появляться в конце пятидесятых — начале шестидесятых годов. В ранней книге Рихтмайера [Richtmyer, 1957] и более поздней Рихтмайера и Мортон [Richtmyer, Morton, 1967] освещены в основном вопросы, связанные с решением маршевых задач, а в книге Форсайта и Вазова [Forsythe, Wasow, 1960] — с решением эллиптических задач. Быстрое развитие вычислительной гидромеханики продолжалось и в шестидесятые годы. В ранних работах расчет течений с ударными волнами пытались проводить либо по схеме Лакса, либо по схеме с искусственной вязкостью, предложенной Нейманом и Рихтмайером. Среди выполненных в Лос-Аламосской лаборатории ранних работ по вычислительной гидромеханике отметим работы по методам типа «частиц в ячейке», которые используют диссипативные свойства разностных схем для «размазывания»

ударных волн на несколько шагов разностной сетки [Evans, Harlow, 1957].

В 1960 г. Лакс и Вендрофф [Lax, Wendroff, 1960] предложили новый метод расчета газодинамических течений с ударными волнами, позволяющий строить разностные схемы второго порядка точности, существенно меньше размазывающие ударные волны, чем использовавшиеся ранее конечно-разностные методы. Предложенный Мак-Кормаком [MacCormack, 1969] вариант этого метода является и сейчас одним из наиболее популярных методов расчета течений с ударными волнами. Чтобы избежать размазывания скачков уплотнения, можно использовать разностные схемы с выделением скачков. Одной из ранних была работа Гари [Gary, 1962], в которой этот подход использован для расчета движущихся скачков. В работах Моретти с соавторами [Moretti, Abbott, 1966; Moretti, Bleich, 1968] схемы с выделением скачков применены для расчета многомерного сверхзвукового обтекания с ударными волнами тел различной формы. Одна из первых схем с выделением скачка описана Гихтмайером и Муртоном. И сегодня для расчета течений с ударными волнами используются разностные схемы как с выделением, так и с размазыванием скачков.

В последние пятнадцать лет прогресс в вычислительной гидромеханике продолжался, а количество исследователей, работающих в этой области, увеличивалось со все возрастающей скоростью. Поэтому трудно дать краткий обзор истории этого периода и указать всех, чей вклад был значителен. Для интересующихся этим вопросом мы рекомендуем работу Холла [Hall, 1981], в которой подведены итоги развития вычислительной гидромеханики начиная с 1950 г. В заключение отметим еще три работы, целью которых было проинформировать мировую научную общественность о достижениях вычислительной гидромеханики. Работы [Macagno, 1965] и [Harlow, Fromm, 1965] были опубликованы во французском журнале *La Houille Blanche* и в американском журнале *Scientific American* соответственно. В них объяснена полезность численных методов для решения задач гидромеханики и приведен ряд численных примеров, иллюстрирующих достигнутые результаты. В более поздней работе Левина [Levine, 1982], опубликованной в журнале *Scientific American*, рассмотрены потенциальные возможности численных методов. Как и предыдущие работы, она ускорила знакомство научной общественности с состоянием вычислительной гидромеханики и нового поколения ЭВМ.

Глава 2

Уравнения в частных производных

§ 2.1. Введение

Многие физические проблемы сводятся к решению уравнений в частных производных, поэтому необходимо знать физические особенности решений этих уравнений. Для решения конкретных задач необходимо уметь определять тип дифференциального уравнения в частных производных и знать его основные математические особенности. В этой главе рассмотрены математические и физические свойства уравнений с частными производными, встречающихся в газовой динамике и теплопередаче, на ряде примеров показаны наиболее важные особенности их решений. В конце главы приведены сведения, относящиеся к системам уравнений в частных производных. Выписан также ряд модельных уравнений, которые в гл. 4 используются для анализа свойств конечно-разностных схем.

§ 2.2. Физическая классификация уравнений

2.2.1. Стационарные задачи

Задача называется *стационарной*, если решение уравнения в частных производных внутри некоторой области определяется лишь условиями на границе этой области (рис. 2.1). Физически стационарная задача описывает установившийся процесс, а математически сводится к решению задачи с граничными условиями (краевой задачи) для уравнения в частных производных. К стационарным задачам относится определение стационарного поля температур, расчет течения несжимаемой невязкой жидкости, нахождение упругих напряжений в твердом теле.

Иногда стационарные задачи называют *детерминированными*, так как решение в любой внутренней точке области D определяется условиями, заданными на ее границе B , т. е. граничные условия полностью определяют поведение решения в D . Установившиеся процессы описываются уравнениями в частных производных эллиптического типа.

Пример 2.1. Стационарное поле температуры в проводящей среде с постоянным коэффициентом теплопроводности удовлет-

воряет уравнению Лапласа. Рассмотрим типичную задачу расчета двумерного поля температур в твердом теле, температура на границах которого поддерживается постоянной. Эта задача сводится к решению уравнения

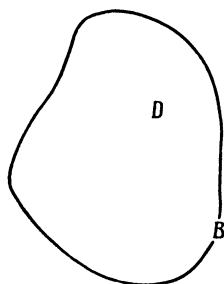
$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$T(0, y) = 0, \quad T(1, y) = 0, \quad T(x, 0) = T_0, \quad T(x, 1) = 0.$$

Расчетная область и граничные условия показаны на рис. 2.2.

Рис. 2.1. Область для решения стационарной задачи. В области D решение должно удовлетворять уравнениям в частных производных; на границе B области D решение должно удовлетворять граничным условиям.



Решение. Для решения линейных уравнений в частных производных часто применяют метод разделения переменных [Greenspan, 1961]. Для того чтобы воспользоваться им, предположим, что искомая температура является произведением двух функций, одна из которых зависит только от x , а другая — только от y :

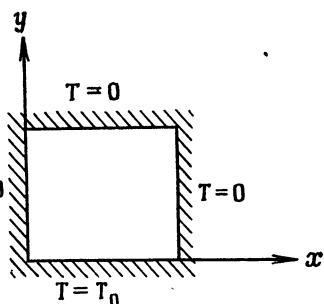
$$T(x, y) = X(x)Y(y).$$

Подставив это выражение для температуры в уравнение Лапласа, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Рис. 2.2. Единичный квадрат с заданной температурой границ.

Выпишем их вместе с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} X'' + \alpha^2 X &= 0, & Y'' - \alpha^2 Y &= 0, \\ X(0) &= 0, & & \\ X(1) &= 0, & Y(1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$



Штрихом здесь обозначено дифференцирование. Появление в уравнениях коэффициента α^2 связано с проведенным разделением переменных. Значение этого коэффициента необходимо определить в процессе решения задачи. Выпишем решения уравнений (2.2):

$$X(x) = A \sin(n\pi x), \quad Y(y) = C \operatorname{sh}[n\pi(y-1)].$$

Граничные условия учитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} 1. \quad T(0, y) = 0 &\rightarrow X(0) = 0, \\ T(x, 1) = 0 &\rightarrow Y(1) = 0. \end{aligned}$$

Эти условия определяют тип функций, входящих в выражение для температуры $T(x, y)$. Например, граничное условие $T(0, y) = 0$ выполняется в том случае, когда решение уравнения для функции $X(x)$ удовлетворяет условию $X(0) = 0$. Поэтому, хотя общее решение дифференциального уравнения содержит как синусы, так и косинусы, граничное условие позволяет исключить члены, содержащие косинус. Аналогичную роль для второго обыкновенного дифференциального уравнения играет граничное условие $T(x, 1) = 0$, приводящее к условию $Y(1) = 0$.

$$2. \quad T(1, y) = 0 \rightarrow X(1) = 0.$$

Это условие позволяет определить собственные значения, т. е. такие значения коэффициента α , при которых существует нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение обыкновенного дифференциального уравнения с однородными граничными условиями. Так как решение первого из уравнений (2.2) имеет вид

$$X(x) = A \sin(\alpha x),$$

то нетривиальное решение $X(x)$, удовлетворяющее условию $X(1) = 0$, существует лишь при $\alpha = n\pi$, где $n = 1, 2, \dots$.

$$3. \quad T(x, 0) = T_0.$$

Заданное значение температуры на оси x позволяет определить, в какой комбинации собственные функции входят в решение. Запишем решение рассматриваемой задачи в виде

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \operatorname{sh}[n\pi(y-1)], \quad (2.3)$$

т. е. как сумму собственных функций, удовлетворяющих заданному уравнению и трем граничным условиям. В общем случае решение записывается в виде суммы ряда, членами которого являются произведения синусов и косинусов на гиперболические синусы и косинусы. Для рассматриваемой задачи четвертое гра-

ничное условие, заданное на нижней границе области, имеет вид $T(x, 0) = T_0$. Используя это выражение для определения коэффициентов A_n в соотношении (2.3), получим (см. задачу 2.1)

$$A_n = \frac{2T_0}{n\pi} \frac{[(-1)^n - 1]}{\text{sh}(n\pi)}.$$

Найденное решение $T(x, y)$ уравнения описывает распределение температуры в твердом теле. Очевидно, что значение температуры в любой внутренней точке области зависит от условий, заданных на всей границе этой области. Такая зависимость решения от граничных условий характерна для всех стационарных задач математической физики.

Пример 2.2. Безвихревое течение несжимаемой невязкой жидкости описывается уравнением Лапласа. Найдем поле скорости, возникающее при обтекании изображенного на рис. 2.3 цилиндра

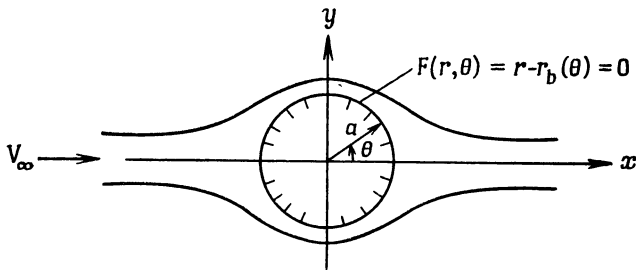


Рис. 2.3. Схема двумерного обтекания цилиндра.

потокм несжимаемой невязкой жидкости. Введем потенциал скорости ϕ , т. е. такую функцию ϕ , что $\nabla\phi = \mathbf{V}$, где \mathbf{V} — вектор скорости. Тогда течение несжимаемой невязкой жидкости описывается уравнением $\nabla^2\phi = 0$. На поверхности цилиндра задается граничное условие

$$\mathbf{V} \cdot \nabla F = 0, \quad (2.4)$$

где $F(r, \theta) = 0$ — уравнение, описывающее поверхность цилиндра. При удалении от цилиндра скорость должна стремиться к скорости набегающего потока, т. е. при $x, y \rightarrow \infty$

$$\nabla\phi = \mathbf{V}_\infty. \quad (2.5)$$

Решение. Будем искать решение поставленной задачи в виде суммы двух простых частных решений уравнения Лапласа. Сумма двух решений будет также решением уравнения вследствие линейности уравнения Лапласа, для которого любая линейная комбинация его решений является решением этого уравнения

[Churchill, 1941]. В случае обтекания кругового цилиндра потенциал искомого решения является суммой потенциалов однородного потока и диполя [Karamcheti, 1966]:

$$\phi = V_{\infty}x + \frac{K \cos \theta}{\sqrt{x^2 + y^2}} = V_{\infty}x + \frac{Kx}{x^2 + y^2}. \quad (2.6)$$

Первое слагаемое описывает однородный поток, а второе — диполь интенсивности $2\pi K$.

2.2.2. Маршевые задачи

Маршевой или эволюционной (или задачей распространения) называется задача, в которой требуется найти решение уравнения в частных производных в незамкнутой области при заданных граничных и начальных условиях. Расчетная область и маршевое направление (в этом направлении область не замкнута)

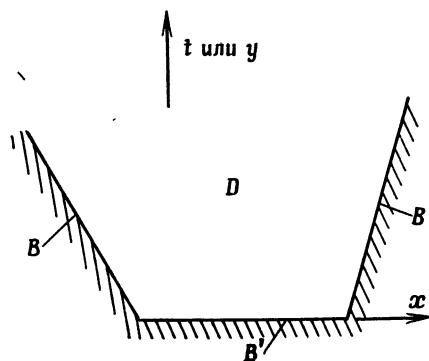


Рис. 2.4. Область для решения маршевой (эволюционной) задачи. В области D решение должно удовлетворять уравнениям в частных производных; на границе B решение должно удовлетворять граничным условиям; на поверхности B' задаются начальные данные.

показаны на рис. 2.4. Математически задачи такого типа являются задачами с начальными условиями или задачами с начальными и граничными условиями. Решение таких задач должно быть найдено последовательным движением в маршевом направлении наружу от поверхности, на которой заданы начальные условия, при этом необходимо удовлетворить также граничным условиям. Такие задачи описываются уравнениями в частных производных гиперболического или параболического типа.

Пример 2.3. Определить нестационарное поле температуры в одномерном твердом теле (рис. 2.5) с коэффициентом тепло-

проводности α , если начальная температура тела равна нулю, а в последующие моменты времени температура левой границы остается равной нулю, а температура правой границы поддерживается равной T_0 .

Решение. Процесс распространения тепла в одномерном случае описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.7)$$

В рассматриваемом случае решение должно удовлетворять граничным условиям

$$T(0, t) = 0, \quad T(1, t) = T_0 \quad (2.8)$$

и начальному условию

$$T(x, 0) = 0. \quad (2.9)$$

Проще всего получить решение поставленной задачи, введя новую искомую переменную $u = T - T_0x$. Тогда для функции u получается однородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с однородными граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

и начальным распределением

$$u(x, 0) = -T_0x.$$

Теперь мы можем воспользоваться методом разделения переменных. Будем искать решение уравнения в виде $u(x, t) = V(t)X(x)$. Обозначим возникающую при разделении переменных константу через $-\beta^2$ и сведем решение поставленной задачи к решению обыкновенных дифференциальных уравнений

$$V' + \alpha\beta^2V = 0, \quad X'' + \beta^2X = 0, \quad X(0) = X(1) = 0.$$

В результате получим, что удовлетворяющее начальному распределению для функции u решение уравнения в частных производных имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0(-1)^n}{n\pi} e^{-n^2\pi^2\alpha t} \sin(n\pi x) = T - T_0x,$$

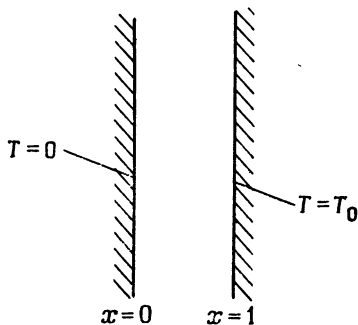


Рис. 2.5. Схема задания граничных условий для одномерного уравнения теплопроводности.

или

$$T = T_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0 (-1)^n}{n\pi} e^{-n^2 \pi^2 a t} \sin(n\pi x). \quad (2.10)$$

Пример 2.4. Определить смещение $y(x, t)$ струны длины l , закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$, если ее начальное смещение имело форму $y(x, 0) = \sin(\pi x/l)$ и начальные скорости отсутствуют. Предполагается, что внешние силы на струну не действуют.

Решение. Колебания струны описываются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

(a — положительная константа). Решение должно удовлетворять граничным условиям

$$y(0, t) = y(l, t) = 0 \quad (2.12)$$

и начальным условиям

$$y(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) |_{t=0} = 0. \quad (2.13)$$

Используя метод разделения переменных, получим решение в виде

$$y(x, t) = \sin \left(\pi \frac{x}{l} \right) \cos \left(a\pi \frac{t}{l} \right). \quad (2.14)$$

Обычно решение такого типа задач удается найти лишь в виде суммы бесконечного ряда. В рассматриваемом примере удалось обойтись лишь одним слагаемым благодаря тому, что первый член ряда в точности удовлетворяет начальным условиям.

Характер физических процессов, описываемых уравнением теплопроводности и волновым уравнением, различен, хотя оба этих уравнения являются маршевыми. Различаются также методы их решения и математические свойства этих решений. Причины этого будут ясны после изучения математических свойств уравнений в частных производных.

Типичными примерами маршевых задач являются также нестационарные течения невязкой жидкости, стационарные сверхзвуковые течения невязкого газа, пограничный слой, нестационарное распространение тепла.

§ 2.3. Математическая классификация уравнений

Уравнение в частных производных второго порядка, записанное в общем виде, обычно используют для пояснения математической классификации уравнений в частных производных. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g(x, y). \quad (2.15)$$

Здесь a, b, c, d, e, f — функции от x, y , т. е. рассматривается лишь линейное уравнение. Хотя для последующего анализа это ограничение несущественно, однако оно позволяет упростить изложение. Часто рассматривают квазилинейные уравнения, т. е. уравнения, линейные относительно старших производных. В этом случае коэффициенты a, b и c в уравнении (2.15) могут зависеть от x, y, ϕ, ϕ_x и ϕ_y . Мы, однако, ограничимся линейным уравнением (2.15) с коэффициентами, зависящими лишь от x и y .

Определим теперь канонические формы записи уравнений в частных производных различных типов. Известно, что в виде (2.15) могут быть записаны уравнения трех различных типов — гиперболические, параболические и эллиптические. Такая классификация уравнений в частных производных второго порядка проводится по аналогии с классификацией кривых второго порядка в аналитической геометрии. Тип уравнения в частных производных, так же как и тип конического сечения кривой второго порядка, определяется знаком определителя. Уравнение называется *гиперболическим* в точке (x_0, y_0) , если

$$b^2 - 4ac > 0. \quad (2.16)$$

Его каноническая форма ¹⁾ имеет вид

$$\phi_{\xi\xi} - \phi_{\eta\eta} = h_1(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta). \quad (2.17)$$

Уравнение называется *параболическим* в точке (x_0, y_0) , если

$$b^2 - 4ac = 0. \quad (2.18)$$

Его каноническая форма имеет вид

$$\phi_{\xi\xi} = h_2(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta). \quad (2.19)$$

Уравнение называется *эллиптическим* в точке (x_0, y_0) , если

$$b^2 - 4ac < 0. \quad (2.20)$$

Его каноническая форма

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = h_3(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta). \quad (2.21)$$

¹⁾ В отечественной литературе ее обычно называют второй канонической формой гиперболического уравнения. — *Прим. ред.*

Волновое уравнение, уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа — соответственно уравнения трех указанных типов. При исследовании уравнений гиперболического типа часто используют их *характеристическую форму*¹⁾

$$\phi_{\xi\eta} = h_4(\phi_{\xi}, \phi_{\eta}, \phi, \xi, \eta), \quad (2.22)$$

которая особенно удобна для нахождения аналитических решений.

Проведем в уравнении (2.15) замену переменных

$$(x, y) \rightarrow (\xi, \eta), \quad (2.23)$$

т. е. вместо независимых переменных x и y введем новые переменные ξ и η . Потребуем, чтобы это преобразование было невырожденным, т. е. чтобы между (x, y) и (ξ, η) существовало взаимно однозначное соответствие. Для этого достаточно, чтобы был отличен от нуля якобиан

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (2.24)$$

[Taylor, 1955]. При применении преобразования координат (2.23) все производные, входящие в уравнение (2.15), вычисляются по правилу дифференцирования сложной функции. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \eta_x \frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= \xi_x^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} + \eta_x^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} + \xi_{xx} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \eta_{xx} \frac{\partial\phi}{\partial\eta}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подставив эти выражения для производных в (2.15), получим

$$A\phi_{\xi\xi} + B\phi_{\xi\eta} + C\phi_{\eta\eta} + \dots = g(\xi, \eta).$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2, \\ B &= 2a\xi_x \eta_x + b\xi_x \eta_y + b\xi_y \eta_x + 2c\xi_y \eta_y, \\ C &= a\eta_x^2 + b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned}$$

Становится ясным важный результат этого преобразования. Дискриминант преобразованного уравнения

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)^2, \quad (2.26)$$

¹⁾ В отечественной литературе ее обычно называют первой канонической формой гиперболического уравнения. — *Прим. ред.*

причем

$$\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}.$$

Следовательно, любое невырожденное преобразование переменных не меняет тип дифференциального уравнения.

2.3.1. Гиперболические уравнения в частных производных

Для приведения гиперболического уравнения в частных производных к характеристической форме (2.22) перейдем к переменным ξ, η , являющимися корнями уравнений $A = 0$ и $C = 0$. Первое из этих уравнений имеет вид

$$a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0,$$

или, разделив на $\xi_y \neq 0$, имеем

$$a \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + b \frac{\xi_x}{\xi_y} + c = 0. \quad (2.27)$$

Рассмотрим поверхности $\xi(x, y) = \text{const}$. На этих поверхностях

$$d\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x} dx + \frac{\partial\xi}{\partial y} dy = 0,$$

т. е. $\xi_x/\xi_y = -dy/dx$. Подстановка этого выражения в (2.27) приводит к уравнению характеристик

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \frac{dy}{dx} + c = 0.$$

Найдем корни этого уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.28)$$

Поверхности $\xi(x, y) = \text{const}$ и $\eta(x, y) = \text{const}$ определяются из решения двух полученных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.28). Найденные таким образом функции ξ и η называются *характеристиками* уравнения (2.15). Выбирая их в качестве независимых переменных, можно привести исходное уравнение в частных производных к виду (2.22), которое поэтому и называется *характеристической формой* гиперболического уравнения.

Замена искомой функции ϕ на Φ позволяет в случае постоянных коэффициентов a, b, c, d и e преобразовать уравнение (2.15) к канонической форме [Gary, 1969]

$$\Phi_{\xi\xi} - \Phi_{\eta\eta} = h(\Phi, \xi, \eta). \quad (2.29)$$

Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения $a\lambda^2 - b\lambda + c = 0$. Преобразование переменных

$$\begin{aligned} y - \lambda_1 x &= \xi + \eta, \\ y - \lambda_2 x &= \xi - \eta \end{aligned} \quad (2.30)$$

позволяет исключить из уравнения член со смешанной производной. Для исключения членов, содержащих первые производные, проведем замену искомой функции по формуле

$$\phi = \Phi e^{-\alpha\xi} e^{-\beta\eta}. \quad (2.30a)$$

Подходящим выбором α и β (см. задачу 2.5) можно привести уравнение (2.15) к виду (2.29). Проиллюстрируем переход к характеристическим переменным на примере волнового уравнения

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = 0. \quad (2.31)$$

Здесь $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, поэтому уравнения (2.28) сводятся к уравнениям

$$\frac{dt}{dx} = \pm 1.$$

Проинтегрировав эти обыкновенные дифференциальные уравнения, получим

$$\begin{aligned} x + t &= \xi, \\ x - t &= \eta. \end{aligned}$$

Перейдем к переменным ξ , η . Так как

$$\begin{aligned} \phi_{tt} &= \phi_{\xi\xi} - 2\phi_{\xi\eta} + \phi_{\eta\eta}, \\ \phi_{xx} &= \phi_{\xi\xi} + 2\phi_{\xi\eta} + \phi_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

то $\phi_{\xi\eta} = 0$. Таким образом, мы нашли характеристическую форму волнового уравнения. Приведем пример, показывающий преимущество этой формы записи волнового уравнения.

Пример 2.5. Решить волновое уравнение

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (2.32)$$

в области $-\infty < x < +\infty$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

Решение. Перейдя к характеристическим переменным, получим $u_{\xi\eta} = 0$. Здесь $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$.

Решение этого уравнения определяется последовательным интегрированием и имеет вид

$$u(x, t) = F_1(x + ct) + F_2(x - ct). \quad (2.33)$$

Это решение называют решением Даламбера волнового уравнения [Wylie, 1951]. Конкретный вид функций F_1 и F_2 определяется начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) = F_1(x) + F_2(x), \\ u_t(x, 0) &= g(x) = cF_1'(x) - cF_2'(x). \end{aligned}$$

Теперь можно выписать решение поставленной задачи:

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau. \quad (2.34)$$

Используем это решение для иллюстрации основных свойств гиперболических уравнений в частных производных. На рис. 2.6

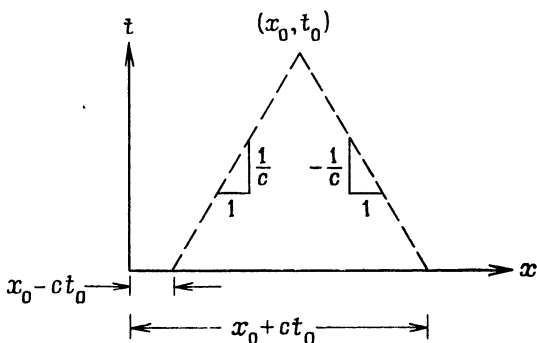


Рис. 2.6. Характеристики волнового уравнения.

показаны характеристики, проходящие через точку (x_0, t_0) . Тангенс угла наклона правой характеристики равен $+1/c$, а тангенс левой равен $-1/c$. Решение $u(x, t)$ в точке (x_0, t_0) зависит лишь от начальных значений в интервале $x_0 - ct_0 \leq x \leq x_0 + ct_0$. Первое слагаемое в решении (2.34) описывает перенос начальных данных вдоль характеристик, а второе — вклад начального распределения на конечном замкнутом интервале (отрезке).

Продемонстрированная в примере 2.5 ограниченность области зависимости решения является характерной особенностью гиперболических уравнений в частных производных. В этом примере область зависимости ограничена характеристиками, проходящими через точку (x_0, t_0) , так как решение в этой точке определяется лишь условиями на ограниченном этими характеристиками интервале. Это означает, что никакое возмущение, возникающее вне указанного интервала, не может влиять на решение в точке (x_0, t_0) . Это свойство решений характерно для всех

гиперболических уравнений в частных производных и объясняет, почему задача с начальными данными для гиперболических уравнений называется маршевой или эволюционной: начальные данные задаются, а решение определяется последовательным продвижением (решение маршевым методом) по времени или играющей его роль координате.

Имена многих выдающихся математиков связаны с постановкой различных задач для уравнений в частных производных. Для гиперболических уравнений наиболее известной является задача Коши: найти решение уравнения в частных производных с начальными данными, заданными на кривой S . Доказана очень важная теорема (она называется теоремой Коши — Ковалевской) о существовании решения задачи Коши. Эта теорема утверждает, что если начальные данные в окрестности точки (x_0, y_0) — аналитические функции, а функция u_{xx} (для частного случая, рассмотренного в примере 2.5) аналитична в этой точке, то в окрестности точки (x_0, y_0) существует единственное решение u дифференциального уравнения в частных производных, являющееся аналитической функцией.

Рассмотрим подробнее допустимые для гиперболических уравнений постановки задач. Например, для волнового уравнения начальные данные (значения искомой функции и ее производных) можно задавать на любой кривой S , направление которой не совпадает с направлением характеристик. В примере 2.6 будет показано, что если начальные данные заданы на характеристике, то единственное решение задачи Коши найти нельзя. Такая задача называется *некорректно поставленной*. Подробно мы рассмотрим вопрос о корректности постановки задач в § 2.4.

Пример 2.6. Решить записанное в характеристической форме волновое уравнение $u_{\xi\eta} = 0$ с начальными условиями $u(0, \eta) = \phi(\eta)$, $u_{\xi}(0, \eta) = \psi(\eta)$.

Решение. Линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ являются характеристиками рассматриваемого уравнения; следовательно, в нашем примере начальные условия заданы на характеристике.

Разложим решение для u в ряд Тейлора по ξ в окрестности линии $\xi = 0$, на которой заданы начальные условия:

$$u(\xi, \eta) = u(0, \eta) + \xi u_{\xi}(0, \eta) + \frac{\xi^2}{2} u_{\xi\xi}(0, \eta) + \dots$$

Из начальных условий нам известны функции $u(0, \eta)$ и $u_{\xi}(0, \eta)$. Остается найти $u_{\xi\xi}(0, \eta)$.

Из исходного дифференциального уравнения следует, что $u_{\xi\eta}(0, \eta) = 0$. Из начального условия получим, что

$$u_{\xi\eta}(0, \eta) = \psi'(\eta) = 0,$$

и, следовательно,

$$\psi(\eta) = \text{const} = c_1.$$

Мы можем, кроме того, написать

$$\frac{\partial u_{\xi\eta}}{\partial \xi} = \frac{\partial u_{\xi\xi}}{\partial \eta} = 0.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим $u_{\xi\xi} = f(\xi)$. Если теперь учесть начальные условия, то получим

$$u_{\xi\xi}(0, \eta) = \text{const} = c_2.$$

Следовательно,

$$u(\xi, \eta) = \phi(\eta) + \xi c_1 + \frac{\xi^2}{2} c_2,$$

т. е.

$$u(\xi, \eta) = \phi(\eta) + g(\xi).$$

В случае когда начальные данные заданы вдоль характеристики $\xi = 0$, определить вид функции $g(\xi)$ нельзя.

При решении уравнений в частных производных необходимо правильно задавать начальные и граничные условия, так как лишь в случае корректно поставленных задач решение непрерывно зависит от граничных и начальных условий [Hadamard, 1952]. Понятие «корректно поставленная задача» одинаково подходит как для гиперболических, так и для параболических и эллиптических уравнений в частных производных. Пример задачи для уравнения эллиптического типа будет приведен ниже, в § 2.4.

2.3.2. Параболические уравнения в частных производных

В предыдущем разделе мы изучили основные свойства гиперболических уравнений на примере простого уравнения в частных производных. Поступим аналогично и при изучении параболических уравнений. Уравнение (2.15) является параболическим, если $b^2 - 4ac = 0$. Уравнение характеристик в этом случае имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}. \quad (2.35)$$

Для приведения уравнения (2.15) к канонической форме

$$\phi_{\xi\xi} = g(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta) \quad (2.36)$$

перейдем к переменным ξ, η по формулам

$$\xi = x - \lambda_1 y, \quad \eta = x - \lambda_2 y.$$

Коэффициент λ_1 определяется из уравнения (2.35). Так как в случае параболического уравнения существует только одно семейство характеристик, то выбор коэффициента λ_2 ограничивается лишь условием линейной независимости функций ξ и η . Последнее эквивалентно требованию отличия от нуля якобиана:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = f(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0. \quad (2.37)$$

Если выбрать λ_2 удовлетворяющим этому условию и перейти к переменным ξ, η , то получим каноническую форму (2.36).

Параболические уравнения обычно описывают диффузионные процессы. Хотя эти уравнения являются маршевыми (эволюционными), т. е. допускают решение последовательным продвижением по времени (или аналогичной времени маршевой координате), зона зависимости их решений в отличие от гиперболических уравнений не ограничена. Решение параболического уравнения в любой момент времени t_1 зависит от параметров во всей рассматриваемой области в предыдущие моменты времени ($t \leq t_1$), в том числе и от условий на боковых границах. Мы уже

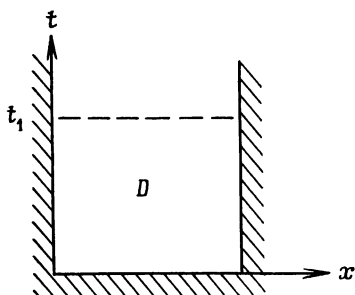


Рис. 2.7. Область зависимости для параболического уравнения.

отмечали это свойство решений параболических уравнений при анализе одномерного уравнения теплопроводности (пример 2.3).

Пусть заданы начальное поле температуры и температура обеих границ; тогда область зависимости решения этого уравнения в момент времени t_1 имеет вид, показанный на рис. 2.7. Рассмотрим еще одну интересную и важную задачу, сводящуюся к решению параболического уравнения.

Пример 2.7. Рассмотрим задачу о нестационарном обтекании несжимаемой вязкой жидкостью внезапно приведенной в движение пластины. Это известная задача Рэлея, допускающая точное аналитическое решение. Так как течение двумерное, то отлична от нуля лишь параллельная пластине составляющая скорости. Выберем систему координат x, y так, чтобы ось x была параллельна, а ось y перпендикулярна пластине. Тогда скорость жидкости описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.38)$$

Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости. Содержащая частную производную по времени левая часть уравнения описывает ускорение жидкости, а правая часть — тормозящее воздействие вязких напряжений ($\tau = \nu \rho \partial u / \partial y$). Выпишем граничные и начальные условия для уравнения (2.38):

$$u(0, y) = 0, \quad u(t, 0) = U \quad (t > 0), \quad u(t, \infty) = 0.$$

Решение. Решение поставленной задачи описывает поле скорости, возникающее при внезапном приведении пластины в движение со скоростью U . При решении параболических уравнений часто достаточно найти их автомодельное решение [Hansen, 1964]. Для этого надо провести замену переменных, позволяющую понизить число независимых переменных в исходном уравнении [Churchill, 1974]. В рассматриваемой задаче мы хотим свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, перейдя от переменных y, t к переменной η . Пусть

$$f(\eta) = \frac{u}{U}, \quad \eta' = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Тогда наша задача сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0$$

с граничными условиями $f(0) = 1, f(\infty) = 0$. Интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение, получим

$$u = U \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right). \quad (2.39)$$

Используя определение функции ошибок

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta, \quad (2.40)$$

перепишем выражение для скорости в виде

$$u = U [1 - \operatorname{erf}(\eta)].$$

Полученное решение показывает, что толщина слоя жидкости, приведенного в движение пластиной, растет по времени как $\sqrt{\nu t}$. Отсюда следует, что рост толщины слоя определяется только коэффициентом кинематической вязкости ν и изменение скорости жидкости в слое обусловлено лишь диффузией скоро-

сти от пластины к неподвижной жидкости. Итак, рассмотренная задача описывает диффузионный процесс, аналогичный одномерному стационарному процессу распространения тепла.

2.3.3. Эллиптические уравнения в частных производных

Третий тип уравнений в частных производных эллиптический. Рассмотрим основные свойства эллиптических уравнений, которые, как отмечалось выше, описывают стационарные процессы. Если уравнение (2.15) эллиптическое, его дискриминант отрицателен, т. е.

$$b^2 - 4ac < 0. \quad (2.41)$$

В этом случае вещественных корней у характеристического уравнения (2.27) нет, а комплексные корни этого уравнения определяются соотношением

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm i \sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Итак, оба семейства характеристик эллиптического уравнения комплексные.

Приведем эллиптическое уравнение к канонической форме. Для этого проведем комплексное преобразование координат

$$y - \lambda_1 x = \xi + i\eta, \quad y - \lambda_2 x = \xi - i\eta \quad (2.42)$$

и, кроме того, положим, что

$$\phi = \phi_1 e^{-\alpha\xi - \beta\eta}. \quad (2.43)$$

Применив преобразования (2.42) и (2.43) к уравнению (2.15), можно привести его к виду

$$\phi_{1\xi\xi} + \phi_{1\eta\eta} + g\phi_1 = f(\xi, \eta), \quad (2.44)$$

аналогичному (2.21), но более удобному и простому, так как функция ϕ_1 входит в уравнение явно.

Характер зависимости решения эллиптического уравнения в частных производных от граничных условий был рассмотрен в примере 2.1. Чтобы еще раз подчеркнуть это свойство, рассмотрим еще одно эллиптическое уравнение.

Пример 2.8. Найти решение $u(r, \theta)$ уравнения Лапласа в круге единичного радиуса

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = f(\theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Решение. Будем искать решение уравнения в виде суммы ряда

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Значения коэффициентов a_n и b_n можно определить стандартным для a_n и b_n методом [Garabedian, 1964]. Для данного примера выражения для a_n и b_n зависят от граничных условий во всех точках единичного круга. Такая зависимость решения в любой внутренней точке области от условий на всей границе области характерна для всех эллиптических уравнений. Отметим, что единственное решение поставленной задачи существует, если только

$$\int f(\theta) dl = 0,$$

где интеграл вычисляется по единичной окружности [Zachmatoglou, Thoe, 1976]. Это можно доказать при помощи теоремы Грина, примененной к единичному кругу. Итак, в рассмотренной задаче граничные условия не могут быть произвольными, а должны удовлетворять специальному интегральному условию.

§ 2.4. Корректно поставленные задачи

В предыдущих разделах мы изучили математические свойства уравнений в частных производных. На ряде примеров было показано, что характер решения этих уравнений определяется заданными граничными и начальными условиями. При изучении гиперболических уравнений в частных производных было показано, что, в случае когда начальные условия заданы на характеристике, нельзя найти единственное решение уравнения. Для эллиптических и параболических уравнений также можно привести примеры неудачных граничных и начальных условий.

Трудность, возникшая при попытке решить гиперболическое уравнение с заданными на характеристике начальными условиями, состоит в ответе на вопрос, корректно ли поставлена рассматриваемая задача. Задача для уравнений в частных производных называется *корректно поставленной*, если она имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных и граничных условий. На возможную неединственность решения уравнений в частных производных указывает пример 2.6. Адамар [Hadamard, 1952] построил простой пример, показывающий, что решение не всегда непрерывно зависит от начальных условий.

Пример 2.9. Решить уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0,$$

с заданными при $y = 0$ граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_y(x, 0) &= (1/n) \sin(nx), \quad n > 0. \end{aligned}$$

Решение. При помощи метода разделения переменных легко получить

$$u = (1/n^2) \sin(nx) \operatorname{sh}(ny).$$

Если рассматриваемая задача корректно поставлена, решение должно непрерывно зависеть от граничных условий, одно из которых имеет вид

$$u_y(x, 0) = (1/n) \sin(nx).$$

Следовательно, при больших n величина u_y малая. Решение уравнения ведет себя при больших n иначе. При больших n решение u стремится к e^{ny}/n^2 , т. е. неограниченно растет даже при малых y . Однако $u(x, 0) = 0$, т. е. непрерывность по начальным данным отсутствует. Итак, задача поставлена некорректно. К этому же выводу можно было прийти на основе проведенного выше анализа свойств уравнений в частных производных, не выписывая их решение. Действительно, уравнение Лапласа эллиптическое, поэтому его решение зависит от условий на всей границе замкнутой области. В рассмотренном же примере требовалось найти решение эллиптического уравнения в открытой области, так как граничные условия были заданы лишь на линии $y = 0$.

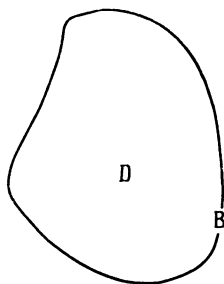


Рис. 2.8. Задача Дирихле: $\nabla^2 u = 0$ в D , $u = f(x)$ на B .

Наиболее часто встречающимся краевым задачам для уравнения Лапласа присвоены имена известных ученых. Первой укажем *задачу Дирихле* (рис. 2.8), в которой требуется найти решение уравнения Лапласа в замкнутой области, если на ее границе задано значение искомой функции. В *задаче Неймана* также надо найти решение уравнения Лапласа в замкнутой области D , если на ее границе задана производная искомой функ-

ции по нормали к B , а не сама искомая функция:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{в } D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \quad \text{на } B.$$

Обобщением задач Дирихле и Неймана, когда на границе замкнутой области задана линейная комбинация искомой функции и ее производной по нормали к границе является так называемая *смешанная краевая задача*:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 \quad \text{в области } D, \\ a_1(x) \frac{\partial u}{\partial n} + a_2(x) u &= h(x) \quad \text{на границе } B. \end{aligned}$$

Эту краевую задачу иногда называют также третьей краевой задачей для уравнения Лапласа [Zachmanoglou, Thoe, 1976] или *задачей Робина*. Часто именем Дирихле, Неймана и Робина называют тип граничных или начальных условий, заданных для любого уравнения в частных производных. Например, если мы говорим: «граничное условие Дирихле», то это значит, что на границе области задано значение искомой функции. Такая терминология используется для уравнений в частных производных любого типа.

§ 2.5. Системы уравнений

При изучении физических процессов обычно приходится решать системы уравнений в частных производных, так как редко удается описать сложный физический процесс одним уравнением в частных производных. Но даже в тех случаях, когда физический процесс описывается одним уравнением в частных производных высокого порядка, это уравнение можно заменить системой уравнений первого порядка. Проиллюстрируем это двумя простыми примерами.

Заменяем волновое уравнение (2.32) системой двух уравнений первого порядка. Обозначим

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = c \frac{\partial u}{\partial x}$$

и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= c \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= c \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Подставляя в любое из уравнений вместо w и v их выражение через u , видим, что функция u удовлетворяет волновому уравнению.

Многие физические процессы описываются уравнением Лапласа (2.1). Заменим его системой уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.46}$$

относительно неизвестных u и v . Это известные *уравнения Коши — Римана* [Churchill, 1960], широко используемые в теории конформных преобразований¹⁾.

Так как многие задачи вычислительной гидродинамики сводятся к решению систем уравнений в частных производных первого порядка, то для корректной постановки задач необходимо уметь определять тип системы уравнений в частных производных. Рассмотрим систему линейных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [A] \frac{\partial u}{\partial x} + [B] \frac{\partial u}{\partial y} + r = 0.\tag{2.47}$$

Для простоты ограничимся случаем, когда матрицы коэффициентов $[A]$ и $[B]$ являются функциями только t , x и y . Неизвестное u является вектором-столбцом, а r зависит от u , x и y .

С точки зрения авторов работы [Zachmanoglou, Thoe, 1976] тип системы уравнений в частных производных первого порядка можно уверенно определить лишь в двух случаях. Система уравнений (2.47) называется *гиперболической* по (x, t) , если все собственные значения матрицы $[A]$ вещественны и различны. Рихтмайер и Мортон [Richtmyer, Morton, 1967] предложили считать гиперболической систему уравнений в том случае, когда все собственные значения матрицы $[A]$ вещественны и эту матрицу можно представить в виде $[T] [\lambda] [T]^{-1}$, где $[\lambda]$ — диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы $[A]$, а матрица $[T]^{-1}$ — матрица левых единичных собственных векторов. То же самое можно сказать о поведении системы уравнений по (y, t) в зависимости от собственных значений матрицы $[B]$.

¹⁾ Следует отметить, что между решениями уравнения Лапласа и уравнений Коши — Римана существует некоторое различие: решение уравнений Коши — Римана всегда является решением уравнения Лапласа, но не всякое решение уравнения Лапласа является решением уравнений Коши — Римана.

В качестве примера рассмотрим систему уравнений (2.45), записав ее в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [A] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.48)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения λ матрицы $[A]$ определяются из решения уравнения

$$\det |[A] - \lambda [I]| = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -c^2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $\lambda^2 - c^2 = 0$. Корни этого уравнения равны: $\lambda_1 = +c$, $\lambda_2 = -c$. Вспомним определение характеристик волнового уравнения

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = +c, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = -c.$$

Система уравнений в этом случае гиперболическая, и мы видим, что собственные значения матрицы $[A]$ определяют направление характеристик волнового уравнения.

Во втором случае тип системы уравнений (2.47) можно определить, когда все собственные значения матрицы $[A]$ комплексные. В этом случае система уравнений называется *эллиптической* по (x, t) . В качестве примера рассмотрим систему уравнений Коши — Римана.

Пример 2.10. Запишем систему уравнений (2.46) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + [A] \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = 0,$$

где

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $[A]$ равны $\lambda_1 = +i$, $\lambda_2 = -i$. Так как собственные значения матрицы $[A]$ комплексные, то система уравнений (2.46) эллиптическая, что согласуется с уже известными нам свойствами решений уравнения Лапласа.

Система уравнений в частных производных первого порядка (2.47) может оказаться эллиптической по (y, t) и гиперболической

ской по (x, t) в зависимости от собственных значений матриц $[B]$ и $[A]$. Это связано с тем, что тип системы уравнений в частных производных первого порядка по (x, t) и по (y, t) определяется независимо.

Хеллвиг [Hellwig, 1977] предложил классификацию систем уравнений вида

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial v}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_2 \frac{\partial v}{\partial y} &= f_1, \\ \hat{a}_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{b}_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \hat{a}_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{b}_2 \frac{\partial v}{\partial y} &= f_2. \end{aligned}$$

Перепишем ее в векторном виде

$$[A] \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + [C] \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = \mathbf{F}. \quad (2.49)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \\ [A] &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ \hat{a}_1 & \hat{b}_1 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ \hat{a}_2 & \hat{b}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ \hat{a}_1 & \hat{b}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ \hat{a}_2 & \hat{b}_1 \end{vmatrix},$$

и пусть $D = B^2 - 4|A||C|$, где $|A|$ — определитель матрицы $[A]$. Система уравнений (2.49) гиперболическая при $D > 0$, эллиптическая при $D < 0$ и параболическая при $D = 0$.

Не ясно, однако, как поступать в том случае, когда часть корней характеристического уравнения вещественные, а часть — комплексные. Система уравнений в частных производных с таким характеристическим уравнением смешанная и может обладать свойствами, характерными одновременно для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений. Понять основные свойства решений систем уравнений в частных производных смешанного типа обычно помогает знание описываемых ими физических процессов, а уже имеющийся опыт решения аналогичных систем уравнений — корректно поставить для них задачу.

Еще более сложной является классификация систем уравнений в частных производных второго порядка. Определить тип такой системы удастся лишь в простейших случаях. Например, система уравнений $\mathbf{u}_t = [A]\mathbf{u}_{xx}$ параболическая в том случае, когда все собственные значения матрицы $[A]$ вещественные. От-

меченные выше проблемы, возникающие при классификации систем уравнений первого порядка смешанного типа, сохраняются и для систем уравнений второго порядка.

§ 2.6. Другие представляющие интерес уравнения в частных производных

В этой главе мы пока изучали в основном решения уравнений второго порядка — уравнения Лапласа, теплопроводности и волнового уравнения, а также систем уравнений в частных производных первого порядка. Приведем еще несколько очень важных уравнений в частных производных, которые либо описывают часто встречающиеся физические процессы, либо используются для анализа свойств разностных схем, применяемых при решении более сложных уравнений. Для большинства приведенных ниже уравнений существуют точные аналитические решения.

1. Линейное волновое уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.50)$$

Это уравнение описывает волну, бегущую вправо с постоянной скоростью c . Оно часто встречается в метеорологии.

2. Невязкое уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.51)$$

Иногда его еще называют *нелинейным волновым уравнением первого порядка* (уравнением переноса). Это уравнение описывает процесс распространения нелинейных волн в одномерном случае.

3. Уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.52)$$

отличается от предыдущего нелинейного уравнения (2.51) тем, что в правую часть добавлен диффузионный член. Это уравнение очень похоже на уравнения газовой динамики и часто используется как простая модель для анализа численных методов их решения.

4. Уравнение Трикоми

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.53)$$

является уравнением смешанного типа. Оно описывает, например, трансзвуковые течения невязкого газа. Важным свойством уравнения Трикоми является то, что оно изменяет тип с эллиптического на гиперболический в зависимости от знака y .

5. Уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (2.54)$$

Это уравнение эллиптического типа описывает распределение температуры в твердом теле, когда внутри тела есть источники тепла интенсивности $f(x, y)$. Уравнение Пуассона описывает также напряженность электрического поля, если плотность распределения зарядов равна $f(x, y)$.

6. Уравнение конвекции и диффузии

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (2.55)$$

Это уравнение описывает перенос скалярной величины ξ при скорости конвекции u ; α — коэффициент либо вязкости, либо диффузии.

7. Уравнение Кортевега де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2.56)$$

Это уравнение описывает процесс распространения нелинейных волн при наличии дисперсии.

8. Уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0. \quad (2.57)$$

Это уравнение описывает движение нестационарной гармонической волны с волновым числом k . В приложениях его используют для описания распространения звуковых волн.

Задачи

2.1. Покажите, что в решении уравнения Лапласа (2.3), полученном в примере 2.1, коэффициенты ряда Фурье A_n определены правильно. *Указание.* Умножьте обе части соотношения (2.3) на $\sin(m\pi x)$ и проинтегрируйте в интервале $0 \leq x \leq 1$; вы получите требуемый результат, если учтете граничное условие $T(x, 0) = T_0$.

2.2. Покажите, что поле скорости, потенциал которого описывается соотношением (2.6), удовлетворяет граничному условию (2.4).

2.3. Покажите, что формулы (2.14) действительно дают решение волнового уравнения. Воспользуйтесь методом разделения переменных.

2.4. Покажите, что тип уравнения в частных производных не меняется при любом невырожденном вещественном преобразовании переменных.

2.5. Приведите гиперболическое уравнение (2.29) к канонической форме, применив к уравнению (2.15) преобразование переменных (2.30) и (2.30а). Найдите α и β .

2.6. Покажите, что записанное в канонической форме уравнение (2.36) действительно параболическое.

2.7. Покажите, что единственное решение уравнения, приведенного в примере 2.8, существует, только если

$$\int f(\theta) dt = 0,$$

где интеграл вычисляется по единичной окружности с центром в начале координат.

2.8. Определите тип уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-kt},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 4.$$

2.9. Определите тип системы уравнений по (t, x) и (t, y) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

2.10. (а) Разложите в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = \sin(x), \quad 0 < x < \pi.$$

(б) Разложите в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \cos(x), \quad 0 < x < \pi.$$

2.11. Найдите характеристики уравнений

(а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

(б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

2.12. Приведите уравнения предыдущей задачи к канонической форме.

2.13. Приведите к канонической форме следующие эллиптические уравнения в частных производных:

(а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

(б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

2.14. Приведите к канонической форме следующие параболические уравнения в частных производных:

$$(a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - e^{xy} = 1,$$

$$(b) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} - 8 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2.15. Решите волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y \geq 0,$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = 1, \quad u_y(x, 0) = 0.$$

2.16. Решите уравнение Лапласа

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sin x + 2 \sin 2x, \\ u(\pi, y) &= 0, \quad u(x, \pi) = 0, \quad u(0, y) = 0. \end{aligned}$$

2.17. Повторите задачу 2.16 при

$$u(x, 0) = -\pi^2 x^2 + 2\pi x^3 - x^4.$$

2.18. Решите уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

с граничными условиями

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0$$

и начальным условием

$$u(0, x) = \sin(2\pi x).$$

2.19. Повторите задачу 2.18, если начальное условие имеет вид

$$u(0, x) = 1 - \cos(4\pi x).$$

Основы метода конечных разностей

§ 3.1. Введение

В этой главе изложены основные понятия и методы, используемые при конечно-разностном решении уравнений в частных производных. Основой метода конечных разностей является дискретизация — замена непрерывной области совокупностью изолированных точек (сеткой), причем решение уравнений ищется лишь в этих точках (узлах сетки). Производные аппроксимируются конечными разностями и решение уравнения в частных производных сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Основные особенности получающейся системы алгебраических уравнений определяются типом исходного уравнения в частных производных (или системы уравнений в частных производных). Стационарные задачи обычно сводятся к системам алгебраических уравнений, которые приходится решать одновременно во всей расчетной области, учитывая заданные граничные условия. Маршевые задачи часто сводятся к алгебраическим уравнениям, которые можно решать последовательно (хотя часто удобнее одновременно решать несколько уравнений). В этой главе рассматривается также вопрос о том, сколь точно решение разностных уравнений приближается к решению исходной задачи. Для этого анализируется погрешность аппроксимации, устойчивость и согласованность разностных схем.

§ 3.2. Метод конечных разностей

Одним из первых шагов при применении метода конечных разностей к решению уравнения в частных производных является переход от непрерывной области к конечно-разностной сетке. Пусть, например, надо найти решение $u(x, y)$ уравнения в частных производных в квадратной области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Введем сетку, т. е. будем рассматривать не $u(x, y)$, а $u(i\Delta x, j\Delta y)$. Положение точек (узлов сетки) внутри области определяется значениями величин i, j , поэтому разностные уравнения обычно записываются для произвольного узла (i, j) , причем используются значения функции u в этом и соседних узлах сетки. Конечно-разностная сетка и используемые обозначения

показаны на рис. 3.1. Пусть $u_{i,j} = u(x_0, y_0)$, тогда

$$u_{i+1,j} = u(x_0 + \Delta x, y_0), \quad u_{i-1,j} = u(x_0 - \Delta x, y_0),$$

$$u_{i,j+1} = u(x_0, y_0 + \Delta y), \quad u_{i,j-1} = u(x_0, y_0 - \Delta y).$$

При решении маршевых задач номер узла сетки по маршевой ординате обычно обозначается верхним индексом (например, u_j^{n+1}). Для каждого уравнения в частных производных существует множество его конечно-разностных аналогов, из которых обычно нельзя выбрать наилучший со всех точек зрения. В первую очередь при использовании метода конечных разностей надо стре-

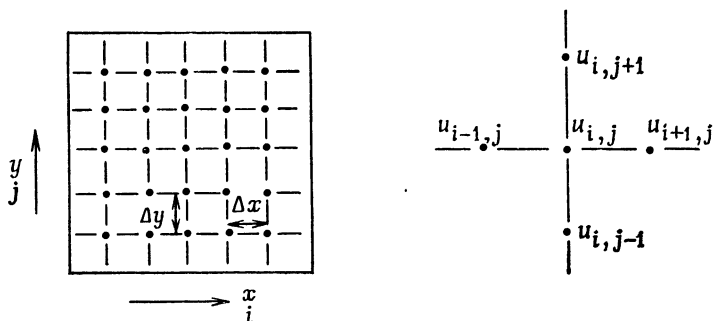


Рис. 3.1. Пример конечно-разностной сетки.

миться к правильной аппроксимации уравнений поставленной задачи, а во вторую очередь выбрать «наилучшую» схему, т. е. оптимизировать ее, учитывая ее точность, экономичность, удобство программной реализации на ЭВМ и т. д.

Для того чтобы лучше понять идею конечно-разностной аппроксимации производных, вспомним определение производной от функции $u(x, y)$ в точке (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

Если функция $u(x, y)$ непрерывна, а Δx — достаточно мало, но конечно, то значение разности $[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)]/\Delta x$ будет близко к значению производной $\partial u/\partial x$. Действительно, из теоремы о конечном приращении следует, что разностное значение производной равно производной искомой функции в некоторой точке интервала длины Δx . Формально проверить точность разностной аппроксимации производной можно, разложив функцию u в ряд Тейлора или по формуле Тейлора с остаточным членом. Выразим $u(x_0 + \Delta x, y_0)$ через значения функции u и ее

производных в точке (x_0, y_0) :

$$u(x_0 + \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots + \\ + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \Big|_0 \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \Big|_{\xi} \frac{(\Delta x)^n}{n!}, \quad x_0 \leq \xi \leq (x_0 + \Delta x). \quad (3.2)$$

Здесь последнее слагаемое — остаточный член. Применяя разности вперед (их часто называют «правыми» разностями), перепишем выражение (3.2) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0 \frac{\Delta x}{2!} - \dots \quad (3.3)$$

Обозначив для краткости значение функции в узле (i, j) разностной сетки индексом i, j , получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i, j} = \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\Delta x} + \text{погрешность аппроксимации}, \quad (3.4)$$

где разность $(u_{i+1, j} - u_{i, j})/\Delta x$, очевидно, является конечно-разностным представлением производной $(\partial u/\partial x)_{i, j}$. Погрешностью аппроксимации называется разность значений частной производной и ее конечно-разностного аналога. Можно характеризовать погрешность аппроксимации стандартным математическим обозначением порядка малой величины (O). Тогда последнее выражение можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i, j} = \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\Delta x} + O(\Delta x),$$

где $O(\Delta x)$ имеет точный математический смысл. Представление погрешности аппроксимации в виде $O(\Delta x)$ обозначает, что погрешность аппроксимации по абсолютной величине не превосходит $K|\Delta x|$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (для достаточно малых Δx), причем $K > 0$ — вещественная константа. Практически порядок погрешности аппроксимации в этом случае равен Δx и является самой высокой степенью, общей для всех членов уравнения.

В общем случае выражение $f(x) = O(\phi(x))$ означает, что существует такая не зависящая от x константа K , что $|f(x)| \leq K|\phi(x)|$ для всех x из области S , где f и ϕ — вещественные или комплексные функции x , определенные в S . В качестве области S часто выбирается область $x \rightarrow \infty$ (достаточно большие x) или, как бычно бывает при использовании разностных методов, область $x \rightarrow 0$ (достаточно малые x). Подробно математическое обозначение символа O описано в учебнике Уиттекера и Ватсона [Whittaker, Watson, 1927].

Отметим, что представление погрешности аппроксимации в виде $O(\Delta x)$ ничего не говорит о величине погрешности, а лишь указывает на характер ее стремления к нулю. Если погрешность другой конечно-разностной аппроксимации производной равна $O[(\Delta x)^2]$, то можно ожидать, что во втором случае погрешность аппроксимации будет меньше, чем в первом. Это утверждение безусловно верно для достаточно малых Δx , но какое Δx будет «достаточно малым», определить заранее сложно.

Можно построить бесконечно много конечно-разностных аппроксимаций производной $\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j}$. В качестве примера построим аппроксимацию этой производной с использованием разностей назад (их называют также «левыми» разностями). Запишем

$$u(x_0 - \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0 \frac{(\Delta x)^2}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_0 \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (3.5)$$

После несложных преобразований найдем выражение, аппроксимирующее производную разностями назад

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.6)$$

Вычитая соотношение (3.5) из соотношения (3.2), получим аппроксимацию производной центральными разностями

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} + O(\Delta x)^2. \quad (3.7)$$

Складывая выражение (3.2) и (3.5), найдем конечно-разностную аппроксимацию производной второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2. \quad (3.8)$$

Отметим, что приведенные примеры отнюдь не исчерпывают всех возможных конечно-разностных аппроксимаций производных первого и второго порядка.

Для сокращения записи удобно ввести разностные операторы. Будем называть разностным оператором первого порядка вперед по переменной x выражение

$$\Delta_x u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j}. \quad (3.9)$$

Тогда конечно-разностную аппроксимацию вперед частной производной первого порядка можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) = \frac{\Delta_x u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.10)$$

Аналогично записывается и конечно-разностная аппроксимация производной $\partial u / \partial y$:

$$\frac{\Delta_y u_{i,j}}{\Delta y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y}.$$

Введем также разностный оператор первого порядка назад

$$\nabla_x u_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j}. \quad (3.11)$$

Используя его, можно записать конечно-разностную производную назад функции u в узле (i, j) разностной сетки в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) = \frac{\nabla_x u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.12)$$

Часто используют центральные разностные операторы $\bar{\delta}$, δ и δ^2 :

$$\bar{\delta}_x u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i-1,j}, \quad (3.13)$$

$$\delta_x u_{i,j} = u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}, \quad (3.14)$$

$$\delta_x^2 u_{i,j} = \delta_x (\delta_x u_{i,j}) = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \quad (3.15)$$

и оператор осреднения μ :

$$\mu_x u_{i,j} = \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{2}. \quad (3.16)$$

Удобно ввести специальные операторы центральных разностей, хотя два из них легко выразить через разностные операторы вперед и назад первого порядка:

$$\bar{\delta}_x u_{i,j} = \Delta_x u_{i,j} + \nabla_x u_{i,j}, \quad (3.17)$$

$$\delta_x^2 u_{i,j} = \Delta_x u_{i,j} - \nabla_x u_{i,j} = \Delta_x \nabla_x u_{i,j}. \quad (3.18)$$

Используя введенные центральные разностные операторы, конечно-разностный аналог первой производной можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 = \frac{\bar{\delta}_x u_{i,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2. \quad (3.19)$$

Аналогично аппроксимируется центральными разностями и вторая производная:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 = \frac{\delta_x^2 u_{i,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2. \quad (3.20)$$

Разностные операторы вперед и назад более высокого порядка определяются рекуррентными соотношениями

$$\Delta_x^n u_{i,j} = \Delta_x (\Delta_x^{n-1} u_{i,j}), \quad (3.21)$$

$$\nabla_x^n u_{i,j} = \nabla_x (\nabla_x^{n-1} u_{i,j}). \quad (3.22)$$

В качестве примера приведем конечно-разностную аппроксимацию вперед второй производной:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_x^2 u_{i,j}}{(\Delta x)^2} &= \frac{\Delta_x (u_{i+1,j} - u_{i,j})}{(\Delta x)^2} = \frac{u_{i+2,j} - u_{i+1,j} - u_{i+1,j} + u_{i,j}}{(\Delta x)^2} = \\ &= \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + O(\Delta x). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Можно показать, что разностная аппроксимация вперед или назад производной любого порядка записывается в виде

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \Big|_{i,j} = \frac{\Delta_x^n u_{i,j}}{(\Delta x)^n} + O(\Delta x), \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \Big|_{i,j} = \frac{\nabla_x^n u_{i,j}}{(\Delta x)^n} + O(\Delta x). \quad (3.25)$$

Центрально-разностная аппроксимация производной любого порядка, большего двух, выражается через операторы Δ , ∇ и δ . Более подробно применение разностных операторов описано в курсах вычислительной математики; см., например, [Hildebrand, 1956].

Большинство уравнений в частных производных, встречающихся в гидродинамике и теплопередаче, содержат лишь частные производные первого и второго порядков, при этом для аппроксимации производных стараются использовать не более трех узлов разностной сетки. Поэтому на равномерной сетке ($\Delta x = h = \text{const}$) чаще всего применяют приведенные ниже конечно-разностные аппроксимации первых производных

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h), \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2), \quad (3.28)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{-3u_{i,j} + 4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{2h} + O(h^2), \quad (3.29)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h} + O(h^2), \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{1}{2h} \left(\frac{\bar{\delta}_x u_{i,j}}{1 + \delta_x^2/6} \right) + O(h^4). \quad (3.31)$$

Для трехточечной аппроксимации вторых производных на равномерной сетке ($\Delta x = h = \text{const}$) чаще всего используют соотношения

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{h^2} + O(h), \quad (3.32)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h), \quad (3.33)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2), \quad (3.34)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{\delta_x^2 u_{i,j}}{h^2 (1 + \delta_x^2/12)} + O(h^4). \quad (3.35)$$

Остановимся подробнее на записанной (трехточечной компактной разностной аппроксимации производных с четвертым порядком точности (соотношения (3.31) и (3.35) [Orszag, Israeli, 1974]). Обозначив $\partial u / \partial x|_{i,j} = v_{i,j}$, представим (3.31) в виде

$$\left(1 + \frac{\delta_x^2}{6} \right) v_{i,j} = \frac{\bar{\delta}_x u_{i,j}}{2h},$$

или

$$\frac{1}{6} (v_{i+1,j} + 4v_{i,j} + v_{i-1,j}) = \frac{\bar{\delta}_x u_{i,j}}{2h}. \quad (3.36)$$

В это соотношение интересующая нас производная $v_{i,j}$ входит неявно. Производную $v_{i,j}$ можно определить, зная $u_{i,j}$, путем решения системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которое проводится обычно весьма эффективно. К решению системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей сводятся многие маршевые задачи для уравнений в частных производных второго порядка, что будет обсуждаться далее в гл. 4. Здесь же достаточно представлять себе трехдиагональную систему как конфигурацию, которая получается в слу-

чае, когда каждое разностное уравнение системы включает одну искомую функцию, вычисленную в трех смежных узлах разностной сетки. Соотношение (3.35) позволяет неявно выразить вторую производную $\partial^2 u / \partial x^2 |_{i,j}$. Некоторые аппроксимации производных, в которых используется и более трех узлов разностной сетки, приведены в табл. 3.1. Для полноты несколько общих представлений смешанных частных производных приведено в табл. 3.2. Они будут полезны для схем, которые будут обсуждаться в последующих главах. Справедливость этих соотношений можно проверить, используя разложение функции u в ряд Тейлора для двух переменных:

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = u(x_0, y_0) + \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x_0, y_0) + \\ + \frac{1}{2!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u(x_0, y_0) + \dots + \\ + \frac{1}{n!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n u(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (3.37)$$

Таблица 3.1. Конечно-разностные аппроксимации производных, использующие больше трех узлов разностной сетки

Производная	Конечно-разностная аппроксимация	Уравнение
$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} _{i,j}$	$\frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2h^3} + O(h^2)$	(3.38)
$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} _{i,j}$	$\frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4} + O(h^2)$	(3.39)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} _{i,j}$	$\frac{-u_{i+3,j} + 4u_{i+2,j} - 5u_{i+1,j} + 2u_{i,j}}{h^2} + O(h^2)$	(3.40)
$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} _{i,j}$	$\frac{-3u_{i+4,j} + 14u_{i+3,j} - 24u_{i+2,j} + 18u_{i+1,j} - 5u_{i,j}}{2h^3} + O(h^2)$	(3.41)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} _{i,j}$	$\frac{2u_{i,j} - 5u_{i-1,j} + 4u_{i-2,j} - u_{i-3,j}}{h^2} + O(h^2)$	(3.42)
$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} _{i,j}$	$\frac{5u_{i,j} - 18u_{i-1,j} + 24u_{i-2,j} - 14u_{i-3,j} + 3u_{i-4,j}}{2h^3} + O(h^2)$	(3.43)
$\frac{\partial u}{\partial x} _{i,j}$	$\frac{-u_{i+2,j} + 8u_{i+1,j} - 8u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{12h} + O(h^4)$	(3.44)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} _{i,j}$	$\frac{-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{12h^2} + O(h^4)$	(3.45)

Таблица 3.2. Конечно-разностные аппроксимации смешанных производных

Производная	Конечно-разностная аппроксимация	Уравнение
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big _{i,j}$	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}}{\Delta y} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \right) + O(\Delta x, \Delta y)$	(3.46)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big _{i,j}$	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} - \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}}{\Delta y} \right) + O(\Delta x, \Delta y)$	(3.47)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big _{i,j}$	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} - \frac{u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}}{\Delta y} \right) + O(\Delta x, \Delta y)$	(3.48)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big _{i,j}$	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{\Delta y} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} \right) + O(\Delta x, \Delta y)$	(3.49)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big _{i,j}$	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2 \Delta y} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2 \Delta y} \right) + O[\Delta x, (\Delta y)^2]$	(3.50)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big _{i,j}$	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2 \Delta y} - \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2 \Delta y} \right) + O[\Delta x, (\Delta y)^2]$	(3.51)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big _{i,j}$	$\frac{1}{2 \Delta x} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2 \Delta y} - \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2 \Delta y} \right) + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$	(3.52)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big _{i,j}$	$\frac{1}{2 \Delta x} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{\Delta y} - \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}}{\Delta y} \right) + O[(\Delta x)^2, \Delta y]$	(3.53)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big _{i,j}$	$\frac{1}{2 \Delta x} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}}{\Delta y} - \frac{u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}}{\Delta y} \right) + O[(\Delta x)^2, \Delta y]$	(3.54)

§ 3.3. Конечно-разностная аппроксимация уравнений в частных производных

3.3.1. Погрешность аппроксимации

Анализ погрешности аппроксимации начнем с уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.55)$$

Используя разности вперед для аппроксимации производной по времени и центральные разности для аппроксимации второй

производной, получим аппроксимацию для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (3.56a)$$

Как отмечено в § 3.2, погрешность аппроксимации уравнения (3.56a) определяется использованием разностей вперед по t и центральной разностной аппроксимации производных по x . Если в уравнении (3.55) член справа перенести в левую часть, а в правой части записать погрешность аппроксимации производных, то получим

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_I = \underbrace{\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}_{II} + \underbrace{\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{n,j} \frac{\Delta t}{2} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{n,j} \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \right]}_{III}. \quad (3.56b)$$

Здесь цифрами I, II, III обозначены исходное уравнение в частных производных, его конечно-разностный аналог и погрешность аппроксимации. Погрешность конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения определяется разложением в ряд Тейлора в окрестности одной и той же точки (в рассмотренном примере точки (n, j)).

Конечно-разностный аналог уравнения (3.56a) будем называть *простой явной схемой* решения уравнения теплопроводности. Разностная схема называется *явной*, если в каждое алгебраическое уравнение входит лишь одно неизвестное, которое с помощью этого уравнения может быть выражено через уже известные величины. Так как параболическое уравнение теплопроводности решает маршевую задачу, то начальное распределение u должно быть задано, поэтому значения функции u на n -м временном шаге можно считать известными. Если для аппроксимации второй производной в уравнении теплопроводности использовать значения функции u на $(n+1)$ -м временном шаге, то в каждое разностное уравнение войдут три неизвестных. Такая схема называется *неявной*, так как одновременно приходится решать несколько алгебраических уравнений. Подробно различие явной и неявной схем будет рассмотрено в гл. 4.

Заключенное в квадратные скобки и обозначенное цифрой III слагаемое в правой части соотношения (3.56b) называется *погрешностью аппроксимации* уравнения теплопроводности и определяется как разность между исходным уравнением в частных производных и его конечно-разностным аналогом. Отметим, что при вычислении погрешности использованы лишь первые

члены ряда Тейлора. *Порядок* погрешности аппроксимации в этом случае равен $O(\Delta t) + O[(\Delta x)^2]$, который часто для краткости записывают в виде $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$. Применяя численные методы, мы решаем лишь разностные уравнения и надеемся, что погрешность аппроксимации мала. Может быть, на первый взгляд такой подход не вызывает сомнений, но если задуматься, то сразу возникает ряд вопросов. Например, где гарантия, что, решая разностные уравнения маршевым методом, мы получим значения, достаточно близкие к решению исходного уравнения в частных производных? На этот вопрос можно ответить утвердительно, лишь если разностная схема удовлетворяет условиям *согласованности* и *устойчивости*.

3.3.2. Согласованность разностных схем

Согласованной называется разностная схема, аппроксимирующая уравнение в частных производных. Напомним, что погрешностью аппроксимации называется разность между дифференциальным уравнением и его конечно-разностным аналогом, поэтому условием согласованности разностной схемы является стремление к нулю погрешности аппроксимации при измельчении сетки. Это условие безусловно выполняется, если погрешность аппроксимации убывает при измельчении сетки, т. е. если погрешность аппроксимации имеет порядок $O(\Delta t)$, $O(\Delta x)$ и т. д. Однако если порядок погрешности аппроксимации равен, например, $O(\Delta t/\Delta x)$, то схема будет согласованной лишь в том случае, когда измельчение сетки проводится в соответствии с условием $\Delta t/\Delta x \rightarrow 0$. В качестве примера рассмотрим схему Дюфорты — Франкела [DuFort, Frankel, 1953] для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n). \quad (3.57)$$

Главный член погрешности аппроксимации этой схемы, вычисленный с использованием ряда Тейлора, равен

$$\frac{\alpha}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{n,j} (\Delta x)^2 - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{n,j} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_{n,j} (\Delta t)^2.$$

Схема удовлетворяет условию согласованности, если

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) = 0.$$

Если же при измельчении сетки выполняется условие $\Delta t/\Delta x = \beta$, то схема Дюфорты — Франкела согласована не с исходным

уравнением, а с гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3.3.3. Устойчивость разностных схем

Понятие счетной устойчивости строго применимо лишь при решении маршевых задач. Разностная схема называется *устойчивой*, если на каждом шаге по маршевой координате любая ошибка (погрешность округления, погрешность аппроксимации, просто ошибка) не возрастает при переходе от одного шага к другому. Обычно для достижения устойчивости разностной схемы требуется намного больше времени и энергии, чем для достижения ее согласованности. Проверить условие согласованности разностной схемы нетрудно, кроме того, обычно оно выполняется автоматически, т. е. вытекает из использованного метода построения разностной схемы. Устойчивость — свойство более тонкое, и обычно приходится хорошо потрудиться для аналитического доказательства устойчивости разностной схемы. Методы анализа устойчивости разностных схем мы подробно опишем в § 3.6. Большинство этих методов применимо лишь к линейным уравнениям в частных производных, однако полученные для линейных уравнений результаты позволяют анализировать устойчивость численного решения нелинейных уравнений.

Используя эти соображения, ниже покажем, что схема Дюфорта — Франкела (3.57) *безусловно устойчива*, тогда как простая явная схема устойчива лишь при условии, что $r = [\alpha\Delta t/(\Delta x)^2] \leq 1/2$. Это условие ограничивает шаг по маршевой координате (времени), если размер шага по пространственной координате задан.

Схема, использующая центральные разности по времени с погрешностью аппроксимации порядка $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (3.58)$$

безусловно неустойчива и, следовательно, непригодна для численных расчетов, несмотря на то что она выглядит более точной, чем ранее приведенные схемы.

Иногда на неустойчивость схемы указывает физическая нереальность следующих из нее результатов, т. е. неустойчивая разностная схема неправильно описывает физические процессы. Покажем это на примере явной схемы для уравнения теплопроводности (3.56а). Введя параметр $r = \alpha\Delta t/(\Delta x)^2$, преобразуем уравнение (3.56а) к виду

$$u_j^{n+1} = r(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1 - 2r)u_j^n. \quad (3.59)$$

Пусть в момент времени t $u_{j+1}^n = u_{j-1}^n = 100^\circ\text{C}$, а $u_j^n = 0^\circ\text{C}$ (рис. 3.2). Если $r > 1/2$, то температура в узле j на $(n+1)$ -м шаге по времени будет выше температуры в соседних узлах в момент времени n , но это физически невозможно, так как тепло передается от более теплого тела к более холодному, а не наоборот. С физической точки зрения температура в узле j не

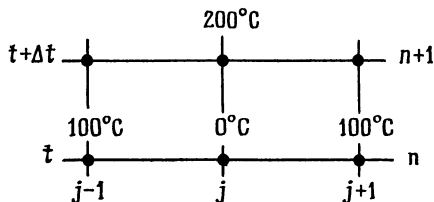


Рис. 3.2. Противоречащее законам физики изменение температуры при $r = 1$.

может на $(n+1)$ -м шаге по времени превышать 100°C , а из уравнения (3.59) следует, что при $r = 1$ эта температура равна 200°C .

3.3.4. Сходимость решения маршевых задач

Выполнения условий устойчивости и согласованности достаточно для сходимости разностной схемы. Под *сходимостью* в данном случае понимается стремление решения конечно-разностного аналога уравнения в частных производных к решению исходного уравнения (для одинаковых начальных и граничных условий) при измельчении сетки. Для линейных уравнений в частных производных доказана теорема Лакса (см. [Richtmyer, Morton, 1967]), которую мы приведем без доказательства.

Теорема Лакса об эквивалентности, Необходимым и достаточным условием сходимости разностной схемы для решения корректно поставленной задачи с начальными данными для линейного уравнения в частных производных является выполнение условий согласованности и устойчивости.

Необходимо отметить, что во многих работах по вычислительной математике предполагается справедливость этой теоремы для нелинейных уравнений в частных производных, хотя для таких уравнений эта теорема не доказана.

3.3.5. Погрешность округления

Любое численно полученное решение, даже так называемое точное аналитическое решение уравнения в частных производных, зависит от ошибок округления, связанных с конечным

числом знаков, используемых при арифметических операциях. Возникающая при этом погрешность называется *погрешностью округления*. Она может оказать существенное влияние на решение конечно-разностных уравнений, так как получение этого решения обычно связано с выполнением большого числа однотипных арифметических операций. В ряде случаев погрешность округления пропорциональна числу узлов разностной сетки, поэтому измельчение сетки, снижая погрешность аппроксимации, может увеличивать погрешность округления.

Напомним, что погрешностью аппроксимации называется погрешность, возникающая при замене уравнения в частных производных его конечно-разностным аналогом. Она равна разности точных (без учета погрешностей округления) решений исходного дифференциального уравнения и его конечно-разностного аналога. Следовательно, погрешность полученного на ЭВМ решения уравнения в частных производных равна сумме погрешностей аппроксимации и округления. Точность численного решения уравнения в частных производных определяется погрешностью аппроксимации не только самого уравнения, но и граничных условий.

3.3.6. Стационарные задачи

В предыдущих разделах основное внимание было уделено исследованию устойчивости и сходимости маршевых задач (гиперболических и параболических уравнений в частных производных). За исключением задачи с начальными данными, большинство полученных результатов без изменения переносится на стационарные задачи, кроме понятия устойчивости разностной схемы. Однако следует заметить, что понятие согласованности применимо к разностным схемам решения уравнений в частных производных любого типа.

Сходимость разностной схемы к точному решению уравнения в частных производных можно рассматривать как сходимость по ошибкам аппроксимации и сходимость по ошибкам округления. При конечно-разностном решении стационарных задач (уравнений эллиптического типа) систему алгебраических уравнений необходимо решить лишь один раз, тогда как в случае маршевых задач одну и ту же систему алгебраических уравнений придется решать на каждом шаге по маршевой координате. Следовательно, непосредственно применить введенное ранее определение устойчивости разностей схемы к стационарным задачам нельзя. Для сходимости разностной схемы решения стационарной задачи по ошибкам округления достаточно потребовать ограниченности погрешности округления при измельчении сетки.

Часто при решении стационарных задач применяются итерационные методы (например, метод Гаусса — Зейделя), поэтому необходимо определить условия сходимости итерационного процесса. Обычно предполагают, что итерационный процесс сошелся, если во всех узлах разностной сетки отличие значений искомым функций на итерациях с номерами $(k + 1)$ и k не превосходит некоторой заранее заданной малой величины, т. е. если $|u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k| < \epsilon$ для всех i, j . Это называется *сходимостью итерационного процесса*. По-видимому (доказательство этого утверждения нам не известно), сходимости разностной схемы по ошибкам округления достаточно для согласованности этой схемы при решении стационарных задач, если только удастся доказать сходимость итерационного процесса при любом измельчении сетки.

Если для решения систем алгебраических уравнений, возникающих при дискретизации стационарных задач, применяют прямые (не итерационные) методы, то необходимо лишь проверить, что возникающие при расчете погрешности, в первую очередь погрешность округления, остаются ограниченными как при любом измельчении сетки, так и при стремлении числа узлов сетки к бесконечности.

В заключение этого раздела отметим, что итерационный метод решения стационарных задач во многом аналогичен маршевому методу решения задач с начальными данными, поэтому вопросы сходимости итерационных процессов при решении стационарных задач и устойчивости разностных схем для решения маршевых задач близки между собой.

3.3.7. Дивергентная форма записи уравнений в частных производных и консервативность разностной схемы

В этом разделе мы обсудим две разные проблемы. Первая из них относится к форме записи уравнений в частных производных. Уравнение в частных производных записано в «дивергентной форме», или, что эквивалентно, в «консервативной форме», если коэффициенты при производных являются либо константами, либо функциями, производные которых в уравнение не входят. Обычно уравнения в частных производных, описывающие законы сохранения, записываются в дивергентной форме тогда, когда в них явно входит дивергенция той величины, для которой этот закон формулируется. Например, дивергентная форма уравнения неразрывности (описывающего закон сохранения массы) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (3.60)$$

Последнее соотношение можно записать в векторной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0.$$

Недивергентной будет, например, такая форма уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.61)$$

В качестве другого примера рассмотрим одномерный процесс распространения тепла в среде с зависящими от координаты плотностью ρ , удельной теплоемкостью c и коэффициентом теплопроводности k . Запишем это уравнение в дивергентной форме

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.62)$$

и недивергентной форме

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (3.63)$$

Взятая со знаком минус правая часть уравнения (3.62) равна дивергенции вектора теплового потока в одномерном случае. При использовании разностных схем, построенных для записанных в недивергентной форме уравнений в частных производных, часто сложно решать уравнения с разрывными коэффициентами, например проводить расчет течений с ударными волнами.

Второй вопрос, который мы рассмотрим в этом разделе, связан с понятием *консервативности конечно-разностной схемы*. Наша книга посвящена в основном методам решения уравнений, являющихся следствием физических законов сохранения, например законов сохранения массы, импульса и энергии. Уравнения в частных производных описывают эти законы сохранения в точке. Конечно-разностная схема обеспечивает близкую аппроксимацию уравнений в частных производных в небольшой области, содержащей несколько узлов разностной сетки. Те же законы сохранения, из которых выводятся уравнения в частных производных, справедливы для любой конечной области (контрольного объема). На самом деле вывод уравнений в частных производных обычно начинают с применения законов сохранения к контрольным объемам. Если конечно-разностная схема даст близкую аппроксимацию уравнения в частных производных в окрестности каждого узла разностной сетки, то можно ожидать, что законы сохранения будут приближенно выполняться и для большего контрольного объема, содержащего довольно большое число узлов разностной сетки. *Консервативной* схемой называется разностная схема, обеспечивающая точное выполнение

законов сохранения (исключая погрешности округления) на любой сетке в конечной области, содержащей произвольное число узлов разностной сетки. Для решения некоторых задач можно использовать только консервативные разностные схемы.

Главным в определении консервативности разностной схемы является слово «точное». Любая согласованная разностная схема обеспечивает приближенное выполнение законов сохранения в большой области, но лишь консервативная разностная схема обеспечивает точное (без учета погрешности округления) выполнение этих законов вследствие взаимного уничтожения ряда членов уравнения. Проиллюстрируем это на примере решения уравнения неразрывности для установившегося течения: $\nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0$. Предположим, что мы построили конечно-разностную схему, аппроксимирующую это уравнение, и решили разностные уравнения во всей области течения. Из закона сохранения массы, примененного к любому контрольному объему, который может совпадать со всей областью течения или составлять какую-то ее часть, следует, что суммарный расход газа через границу этого объема равен нулю (сколько вещества втекает в объем столько и вытекает из него). Формально это можно показать, проинтегрировав записанное в дивергентной форме уравнение по всему объему и воспользовавшись формулой Гаусса — Остроградского

$$\iiint_{\bar{R}} \nabla \cdot \rho \mathbf{V} dR = \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Чтобы показать, что для решения уравнения неразрывности используется консервативная конечно-разностная схема, следует установить, что решение разностных уравнений удовлетворяет конечно-разностному аналогу этого интегрального тождества. Обычно это проверяется для контрольного объема, совпадающего со всей областью течения. Для этого вычислим интеграл в левой части, просуммировав конечно-разностные аналоги уравнения в частных производных во всех узлах разностной сетки. Если конечно-разностная схема консервативна, то при суммировании сократятся все члены, кроме тех, которые описывают поток массы через границу. Последние следует перегруппировать так, чтобы эти члены совпали с конечно-разностным аналогом интеграла в правой части закона сохранения массы. Для этого примера результат будет проверкой равенства втекающего в объем и вытекающего из него количества вещества. Если используемая конечно-разностная схема неконсервативна, то внутри области могут появиться источники и стоки небольшой интенсивности.

Обычно для построения консервативных конечно-разностных схем используют записанные в дивергентной форме уравнения в частных производных. Если записать уравнение в дивергентной форме не удастся, то для построения консервативной конечно-разностной схемы можно воспользоваться *методом контрольного объема* (см. п. 3.4.4). Построенная этим методом конечно-разностная схема оказывается, как правило, консервативной, если конечно-разностные выражения для потоков через прилегающие грани контрольных объемов одинаковы.

Вся недолгая история вычислительной гидромеханики и теплопередачи сопровождается спорами о том, должна ли разностная схема быть консервативной. Однако не только консервативность определяет достоинства и недостатки разностной схемы. Уравнения в частных производных описывают не только законы сохранения в точке, но, как было показано в гл. 2, они содержат информацию о характеристических направлениях и областях зависимости. Конечно-разностная схема должна по возможности правильно описывать и эти свойства уравнений в частных производных. На практике часто используют неконсервативные конечно-разностные схемы, которые в ряде случаев оказываются точнее консервативных. Вопрос о том, нужно ли обеспечивать очень точное выполнение законов сохранения в конечной области, зависит от поставленной задачи. Все согласованные конечно-разностные схемы независимо от того, консервативны они или нет, на достаточно мелкой сетке позволяют в большинстве случаев достичь требуемой точности решения уравнения.

§ 3.4. Различные методы построения конечно-разностных схем

Для данного уравнения в частных производных и данной конечно-разностной сетки конечно-разностный аналог этого уравнения может быть построен разными методами. Укажем на некоторые из них:

- (a) разложение функций в ряд Тейлора;
- (b) интерполяция функций полиномами;
- (c) интегральный метод;
- (d) метод контрольного объема.

Иногда все эти методы приводят к одному и тому же конечно-разностному аналогу исходного уравнения. Сначала проанализируем подробно метод разложения функций в ряд Тейлора, иногда привлекая для аппроксимации граничных условий интерполяционные полиномы.

3.4.1. Разложение функций в ряд Тейлора

В этом разделе мы покажем, как можно формально получать конечно-разностные выражения, удовлетворяющие заданным условиям, используя для этого ряды Тейлора. Пусть мы хотим построить конечно-разностную аппроксимацию производной $\partial u / \partial x|_{i,j}$, имеющую погрешность аппроксимации $O(\Delta x)^2$, используя лишь значения $u_{i-2,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j}$. Проще всего для этого представить $u_{i-2,j}$ и $u_{i-1,j}$ с помощью ряда Тейлора для функции u в точке (i,j) и попытаться выразить из полученных соотношений производную $\partial u / \partial x|_{i,j}$ с требуемой точностью:

$$u_{i-2,j} = u_{i,j} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} (-2\Delta x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{(2\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \frac{(-2\Delta x)^3}{3!} + \dots, \quad (3.64)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} (-\Delta x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i,j} \frac{(-\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.65)$$

Требуемую конечно-разностную аппроксимацию удастся часто получить путем наблюдения или простой подстановкой. Чтобы произвести подстановку, выразим производную $\partial u / \partial x|_{i,j}$ из соотношения (3.64); тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-2,j}}{2\Delta x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x + O(\Delta x)^2.$$

Порядок аппроксимации $O(\Delta x)$ определяется членом $(\partial^2 u / \partial x^2) \Delta x$, содержащим вторую производную. Подставляя $\partial^2 u / \partial x^2$ из соотношения (3.65), получаем требуемую аппроксимацию производной $\partial u / \partial x$. Иногда для построения конечно-разностной аппроксимации используют более формальный подход. Для этого сложим умноженное на a уравнение (3.64) с умноженным на b уравнением (3.65). При $-2a - b = 1$ коэффициент при $(\partial u / \partial x|_{i,j}) \Delta x$ будет равен 1, а при $2a + b/2 = 0$ члены, содержащие $\partial^2 u / \partial x^2|_{i,j}$ и обуславливающие погрешность аппроксимации $O(\Delta x)$, будут из уравнений исключены. Решая систему уравнений

$$\begin{aligned} -2a - b &= 1, \\ 2a + b/2 &= 0, \end{aligned}$$

находим, что $a = 1/2$, $b = -2$. Итак, если сложить умноженное на $1/2$ уравнение (3.64) с умноженным на -2 уравнением (3.65) и разрешить полученное уравнение относительно $\partial u / \partial x|_{i,j}$,

то получим требуемую аппроксимацию производной

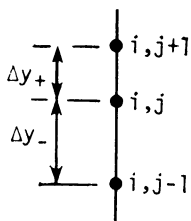
$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i-2,j} - 4u_{i-1,j} + 3u_{i,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2],$$

совпадающую с (3.30). Если внимательно рассмотреть детали этого примера построения конечно-разностной аппроксимации производной, то мы увидим, что при разложении функций в ряд Тейлора действительно необходимо выписать члены, содержащие производную $\partial^3 u / \partial x^3 |_{i,j}$, так как если бы эти члены в результате проведенных арифметических операций сократились, то разностная аппроксимация производных имела бы порядок $O(\Delta x)^3$. Такое благоприятное сокращение содержащих высшие производные

членов встречается достаточно часто, поэтому мы обращаем на него особое внимание.

Следует заметить, что иногда приходится проделывать процедуру, обратную описанной. Пусть аппроксимация (3.30) получена каким-то другим методом, а мы хотим исследовать ее согласованность и точность. Для этого следует подставить в конечно-разностную аппроксимацию производной вместо величин

Рис. 3.3. Обозначения, используемые при расчетах на неравномерной по y сетке.



$u_{i-2,j}$ и $u_{i-1,j}$ их разложения в ряд Тейлора (3.64) и (3.65). Тогда правая часть окажется равной сумме производной $\partial u / \partial x |_{i,j}$ и погрешности аппроксимации. Зная погрешность аппроксимации, можно проверить и условие согласованности, т. е. узнать, стремится ли погрешность аппроксимации к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$.

Рассмотрим несколько более сложный пример. Найти конечно-разностную аппроксимацию производной $\partial u / \partial y$ в точке (i, j) , имеющую погрешность аппроксимации $O(\Delta y)^2$, используя заданные на неравномерной сетке значения $u_{i,j}$, $u_{i,j+1}$, $u_{i,j-1}$. Примем обозначения $\Delta y_+ = y_{i,j+1} - y_{i,j}$, $\Delta y_- = y_{i,j} - y_{i,j-1}$ (рис. 3.3).

Напомним, что на равномерной сетке ($\Delta y_+ = \Delta y_- = \Delta y$) центрально-разностная аппроксимация первой производной равна полусумме односторонних разностных производных вперед и назад:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\bar{\delta}_y u_{i,j}}{2\Delta y} = \frac{\Delta y_+ u_{i,j} + \nabla_y u_{i,j}}{2\Delta y} + O[(\Delta y)^2].$$

Мы желаем знать, можно ли достичь второго порядка точности на неравномерной сетке, взяв геометрически взвешенное среднее

односторонних разностных производных с весами, пропорциональными шагам разностной сетки:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\Delta_y u_{i,j}}{\Delta y_+} \left(\frac{\Delta y_-}{\Delta y_+ + \Delta y_-} \right) + \frac{\nabla_y u_{i,j}}{\Delta y_-} \left(\frac{\Delta y_+}{\Delta y_+ + \Delta y_-} \right) + O[(\Delta y)^2]. \quad (3.66)$$

Справедливость этого соотношения может показаться некоторым очевидной, однако это можно проверить, разложив функцию u в ряд Тейлора в окрестности точки (i, j) . Полагая $\alpha = \Delta y_+ / \Delta y_-$ и используя для сокращения записи обозначение дифференцирования при помощи индексов ($u_y = \partial u / \partial y|_{i,j}$, $u_{yy} = \partial^2 u / \partial y^2|_{i,j}$ и т. д.), получим

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + u_y \alpha \Delta y_- + u_{yy} \frac{(\alpha \Delta y_-)^2}{2!} + u_{yyy} \frac{(\alpha \Delta y_-)^3}{3!} + u_{yyyy} \frac{(\alpha \Delta y_-)^4}{4!} + \dots, \quad (3.67)$$

$$u_{i,j-1} = u_{i,j} + u_y (-\Delta y_-) + u_{yy} \frac{(-\Delta y_-)^2}{2!} + u_{yyy} \frac{(-\Delta y_-)^3}{3!} + u_{yyyy} \frac{(-\Delta y_-)^4}{4!} + \dots \quad (3.68)$$

Как и раньше, сложим умноженное на a уравнение (3.67) с умноженным на b уравнением (3.68) и выразим из полученного уравнения $\partial u / \partial y|_{i,j}$. Требование равенства единице коэффициента при члене $\partial u / \partial y|_{i,j} \Delta y_-$ приводит к соотношению $a\alpha - b = 1$. Чтобы порядок аппроксимации был не хуже, чем $O(\Delta y)^2$, необходимо, чтобы коэффициент при члене, содержащем u_{yy} , был равен нулю, т. е. $\alpha^2 a + b = 0$. Решение этих двух алгебраических уравнений легко получается в виде $a = 1/[\alpha(\alpha + 1)]$, $b = -\alpha/(\alpha + 1)$. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{a \times \text{уравнение (3.67)} + b \times \text{уравнение (3.68)}}{\Delta y_-} + O(\Delta y)^2.$$

Окончательно имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} + (\alpha^2 - 1)u_{i,j} - \alpha^2 u_{i,j-1}}{\alpha(\alpha + 1)\Delta y_-}. \quad (3.69)$$

Последнее соотношение можно привести к виду (3.66).

Мы показали, как, используя разложение функций в ряд Тейлора, строить конечно-разностные аналоги отдельной производной. Но нас в основном интересует построение конечно-разностного аналога всего заданного уравнения в частных производных, обеспечивающих его аппроксимацию во всех точках заданной области. Поэтому все члены уравнения надо расклады-

вать в ряд Тейлора в одной и той же точке. При таком подходе к построению разностной схемы погрешность аппроксимации уравнения в частных производных равна сумме погрешностей аппроксимации его членов.

Разложение функций в ряд Тейлора не обязательно проводить в узле (i, j) разностной сетки. Проиллюстрируем это двумя примерами. Используемые при построении конечно-разностной аппроксимации производных узлы разностной сетки (шаблон) и

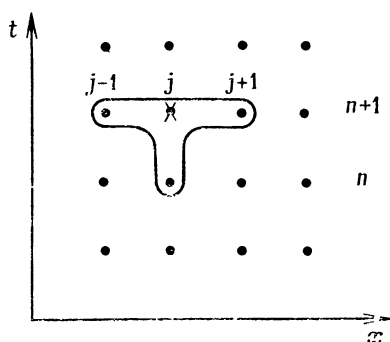


Рис. 3.4. Шаблон, используемый при решении уравнения теплопроводности по неявной схеме; крестиком указана точка, в которой проводится разложение в ряд Тейлора.

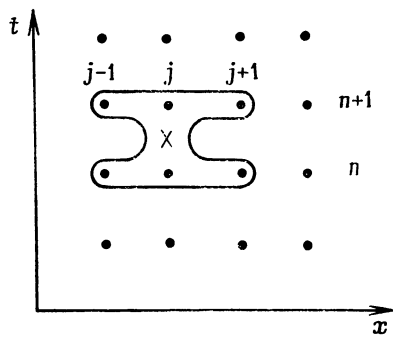


Рис. 3.5. Шаблон, используемый при решении уравнения теплопроводности по схеме Кранка — Николсона; крестиком указана точка, в которой проводится разложение в ряд Тейлора.

точка, в которой проводится разложение функций в ряд Тейлора, показаны на рисунках.

Полностью неявная разностная схема для уравнения теплопроводности (3.55) имеет вид

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}), \quad (3.70)$$

погрешность аппроксимации схемы равна $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$. Используемый шаблон и точка $(n+1, j)$, в которой удобнее всего проводить разложение функции в ряд Тейлора, показаны на рис. 3.4.

Схема Кранка — Николсона для уравнения теплопроводности тогда имеет вид

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2(\Delta x)^2} [u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2(u_j^{n+1} + u_j^n) + u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n], \quad (3.71a)$$

погрешность аппроксимации схемы $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$. Используемый шаблон и точка $(n + 1/2, j)$, в которой удобнее всего проводить разложение решения в ряд Тейлора, показаны на рис. 3.5.

Интересно отметить, что погрешность конечно-разностной аппроксимации всего уравнения в частных производных (но не его отдельных членов) не зависит от выбора точки, в которой проводится разложение решения в ряд Тейлора. Покажем это на примере схемы Кранка — Николсона. Обычно погрешности аппроксимации для этой схемы определяют путем разложения решения в ряд Тейлора в окрестности точки $(n + 1/2, j)$. Использование этой точки приводит к исключению максимального числа членов из разложения Тейлора путем сокращения. Покажем, что при разложении решения в ряд Тейлора в окрестности точки (n, j) или даже точки $(n - 1, j)$ погрешности аппроксимации не изменятся. Для этого мы должны весьма тщательно проанализировать погрешность аппроксимации. Разложим функции $u_{j-1}^n, u_{j+1}^n, u_{j-1}^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}, u_j^{n+1}$ в ряд Тейлора в точке (n, j) ; после несложных преобразований из (3.71a) получим

$$u_t - \alpha u_{xx} = -u_{tt} \frac{\Delta t}{2} + \alpha u_{txx} \frac{\Delta t}{2} + O(\Delta x)^2 + O(\Delta t)^2. \quad (3.71b)$$

Так как в правую часть этого уравнения входят члены $-u_{tt}\Delta t/2$ и $\alpha u_{txx}\Delta t/2$, то на первый взгляд кажется, что погрешность аппроксимации уравнения равна $O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$. Однако сумма указанных членов равна $-\Delta t/2(\partial/\partial t)(u_t - \alpha u_{xx})$, где под знаком производной стоит левая часть уравнения (3.71b). Продифференцировав (3.71b) по t и умножив обе части полученного уравнения на $-\Delta t/2$, получим

$$-\Delta t/2(\partial/\partial t)(u_t - \alpha u_{xx}) = O(\Delta t)^2 + O(\Delta x)^2.$$

Следовательно, погрешность аппроксимации уравнения теплопроводности при использовании схемы Кранка — Никольсона равна $O(\Delta t)^2 + O(\Delta x)^2$ независимо от того, в какой точке проводится разложение функций в ряд Тейлора: $(n + 1/2, j)$ или (n, j) . Порядок аппроксимации уравнения не изменится при разложении функций в ряд Тейлора в окрестности любой другой точки. Рассмотренный пример показывает, что при анализе точности разностной схемы необходимо тщательно проверить, не являются ли коэффициенты при главных членах в выражении для погрешности аппроксимации произведением некоторой функции на производную исходного дифференциального уравнения. Если это так, то для определения погрешности аппроксимации необходимо рассмотреть члены более высокого порядка.

3.4.2. Интерполяция функций полиномами

Интерполяция полиномами имеет много приложений в вычислительной гидродинамике и теплопередаче. Эту технику можно использовать для построения конечно-разностного аналога уравнений в частных производных, однако обычно ее применяют лишь для записи граничных условий или получения более подробной информации вблизи границ при известном численном решении задачи.

Рассмотрим несколько характерных примеров.

Пример 3.1. В этом примере мы построим конечно-разностные аналоги всех входящих в уравнение производных, предполагая, что решение этого уравнения локально аппроксимируется полиномом. Значения полинома в прилегающих к узлу (i, j) узлах разностной сетки должны совпадать с решением уравнения. Достаточное для точного определения коэффициентов полинома число узлов разностной сетки определяется степенью полинома. Продифференцировав интерполяционный полином, можно найти требуемую аппроксимацию входящих в уравнение производных. Рассмотрим уравнение Лапласа, описывающее стационарное двумерное распределение температуры в твердом теле:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (3.72)$$

Предположим, что в окрестности узла (i, j) зависимость температуры от x и y описывается полиномами второго порядка. Например, зафиксировав y , будем считать, что изменение температуры по x вблизи узла (i, j) описывается полиномом

$$T(x, y_0) = a + bx + cx^2.$$

Для удобства положим, что $x = 0$ в точке (i, j) , а $\Delta x = \text{const}$. Очевидно,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i,j} = b, \quad \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} = 2c.$$

Коэффициенты a , b , c можно определить, зная температуру в конкретных узлах сетки и шаг сетки Δx . Для этого сначала надо выбрать используемые при интерполяции средние узлы разностной сетки, т. е. задать геометрическое расположение точек, определяющих разностный шаблон и характер разностной аппроксимации производных: вперед, назад или центрально-разностная аппроксимация. Выбрав узлы $(i-1, j)$, (i, j) и $(i+1, j)$,

получим

$$\begin{aligned} T(i, j) &= a, \\ T(i+1, j) &= a + b \Delta x + c (\Delta x)^2, \\ T(i-1, j) &= a - b \Delta x + c (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения, найдем

$$\begin{aligned} b &= \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2 \Delta x}, \\ c &= \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{2 (\Delta x)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}. \quad (3.73)$$

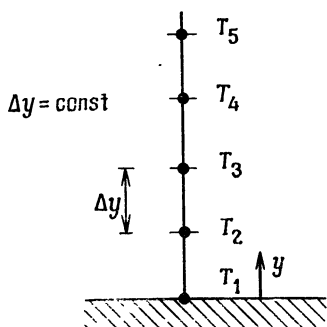
Полученное выражение является точным, если зависимость температуры от x действительно описывается полиномом второго порядка. В общем случае мы лишь предполагаем, что полином второго порядка является хорошей аппроксимацией решения. Погрешность аппроксимации производной (3.73) можно определить подстановкой разложений в ряд Тейлора в окрестности точки (i, j) для $T_{i+1,j}$ и $T_{i-1,j}$ в (3.73). Она равна $O(\Delta x)^2$, причем в выражение для погрешности аппроксимации входят лишь производные температуры четвертого и более высоких порядков, которые равны нулю, если зависимость температуры от x описывается полиномом второго порядка.

Аналогично можно построить конечно-разностную аппроксимацию производной $\partial^2 T / \partial y^2$. Рассмотренный пример показывает, что при использовании интерполяции полиномами приходится произвольно выбирать ряд параметров, влияющих на погрешность аппроксимации уравнений с частными производными и вид разностной схемы, в том числе и используемый шаблон. Следовательно, этот метод не обладает какими-либо особыми преимуществами, гарантирующими, например, оптимальность или устойчивость разностной схемы (для маршевой задачи).

Пример 3.2. Предположим, что мы нашли решение конечно-разностного аналога уравнения энергии и определили распределение температуры вблизи твердой границы. Нам надо теперь определить тепловой поток к стенке, зная распределение температуры лишь в узлах разностной сетки. По закону Фурье тепловой поток через границу определяется выражением $q_w \doteq -k \partial T / \partial y|_{y=0}$. Следовательно, для решения поставленной задачи необходимо заменить производную $\partial T / \partial y|_{y=0}$ ее конечно-разностным аналогом, используя значения температуры в узлах

разностной сетки, известные из решения уравнения энергии. Для этого можно воспользоваться интерполяционными полиномами, предполагая, что распределение температуры вблизи границы описывается полиномом какого-либо порядка, т. е. что оно линейное, параболическое, кубическое и т. д., причем значения полинома совпадают со значением температуры в узлах разностной сетки. Последнее условие позволяет определить коэффициенты полинома.

Например, пусть распределение температуры вблизи границы описывается полиномом второго порядка вида $T = a + by + cy^2$; тогда $\partial T / \partial y|_{y=0} = b$. Если сетка равномерная (рис. 3.6), то



$$\begin{aligned} T_1 &= a, \\ T_2 &= a + b \Delta y + c (\Delta y)^2, \\ T_3 &= a + b (2 \Delta y) + c (2 \Delta y)^2. \end{aligned}$$

Из этих соотношений находим

$$\begin{aligned} a &= T_1, \\ b &= \frac{-3T_1 + 4T_2 - T_3}{2 \Delta y}, \\ c &= \frac{T_1 - 2T_2 + T_3}{2 (\Delta y)^2}. \end{aligned}$$

Рис. 3.6. Расположение узлов конечно-разностной сетки вблизи стенки.

Следовательно, тепловой поток к стенке аппроксимируется выражением

$$q_w = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \approx -kb = \frac{k}{2 \Delta y} (3T_1 - 4T_2 + T_3).$$

Естественно определить погрешность аппроксимации для производной $\partial T / \partial y|_{y=0}$. Для этого выразим T_2 и T_3 через разложение температуры в ряд Тейлора в окрестности точки, лежащей на границе и подставим полученные разложения в конечно-разностную аппроксимацию для производной $\partial T / \partial y|_{y=0}$. Можно поступить и по-другому, учтя, что интерполяционный полином совпадает с первыми тремя членами разложения в ряд Тейлора для температуры в окрестности точки $y = 0$. Выпишем полином второго порядка

$$T = a + by + cy^2$$

и ряд Тейлора

$$T = T(0) + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0 y + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_0 \frac{y^2}{2!} + \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \Big|_0 \frac{y^3}{3!} + \dots$$

Таким образом, аппроксимация $T \approx a + by + cy^2$ определяется первыми тремя членами, а погрешность аппроксимации T — последним из выписанных членов ряда Тейлора и имеет порядок $O(\Delta y)^3$. При определении производной $\partial T/\partial y|_{y=0}$ проводится деление на Δy , поэтому порядок аппроксимации производной равен $O(\Delta y)^2$.

Пример 3.3. Пусть, как и в примере 3.2, уравнение энергии решается для распределения температуры вблизи стенки, только в этом примере задан тепловой поток на стенке в качестве граничного условия. Мы можем теперь использовать интерполяцию полиномами для определения температуры стенки, которая необходима для решения разностных уравнений во внутренних узлах сетки. Другими словами, если $q_w = -k\partial T/\partial y|_{y=0}$ задано, надо определить T при $y=0$, т. е. выразить T_1 через q_w/k , T_2 , T_3 и т. д. Пусть вблизи стенки $T = a + by + cy^2 + dy^3$, и пусть $\partial T/\partial y|_{y=0} = b = -q_w/k$ задано. Наша цель состоит в определении T_1 , которое в рассматриваемом случае равно a . В соответствии с обозначениями рис. 3.6 имеем

$$T_2 = a - \frac{q_w}{k} \Delta y + c (\Delta y)^2 + d (\Delta y)^3,$$

$$T_3 = a - \frac{q_w}{k} (2 \Delta y) + c (2 \Delta y)^2 + d (2 \Delta y)^3,$$

$$T_4 = a - \frac{q_w}{k} (3 \Delta y) + c (3 \Delta y)^2 + d (3 \Delta y)^3.$$

Эти три уравнения можно решить относительно a , c и d при заданных T_2 , T_3 , T_4 , q_w/k и Δy . Так как $T_1 = a$, то, следовательно, поставленная задача решена:

$$T_1 = \frac{1}{11} \left(18T_2 - 9T_3 + 2T_4 + \frac{6 \Delta y q_w}{k} \right) + O[(\Delta y)^4]. \quad (3.74)$$

Погрешность аппроксимации в выражении (3.74) можно определить, либо разложив температуру в ряд Тейлора в окрестности точки (i, j) , либо заметив, что получившийся полином представляет собой усеченный ряд Тейлора.

В заключение обсуждения полиномиальной аппроксимации приведем некоторые выражения для значений функции на стенке и ее производной через значения самой функции. Эти выражения используются, например, для определения значения функции на стенке по заданному на стенке значению ее первой производной. Все приведенные в табл. 3.3 формулы получены при интерполяции искомой функции на равномерной сетке ($\Delta y = h = \text{const}$) полиномами не выше четвертой степени.

Таблица 3.3. Некоторые соотношения, полученные с использованием интерполяционных полиномов

Степень полинома	Выражение для функции или ее производной на стенке	Уравнение
1	$\frac{\partial T}{\partial y} \Big _{i,j} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{h} + O(h)$	(3.75)
1	$T_{i,j+1} = T_{i,j} + h \frac{\partial T}{\partial y} \Big _{i,j} + O(h^2)$	(3.76)
2	$\frac{\partial T}{\partial y} \Big _{i,j} = \frac{1}{2h} (-3T_{i,j} + 4T_{i,j+1} - T_{i,j+2}) + O(h^2)$	(3.77)
2	$T_{i,j} = \frac{1}{3} [4T_{i,j+1} - T_{i,j+2} - 2h \frac{\partial T}{\partial y} \Big _{i,j}] + O(h^3)$	(3.78)
3	$\frac{\partial T}{\partial y} \Big _{i,j} = \frac{1}{6h} (-11T_{i,j} + 18T_{i,j+1} - 9T_{i,j+2} + 2T_{i,j+3}) + O(h^3)$	(3.79)
3	$T_{i,j} = \frac{1}{11} [18T_{i,j+1} - 9T_{i,j+2} + 2T_{i,j+3} - 6h \frac{\partial T}{\partial y} \Big _{i,j}] + O(h^4)$	(3.80)
4	$\frac{\partial T}{\partial y} \Big _{i,j} = \frac{1}{12h} (-25T_{i,j} + 48T_{i,j+1} - 36T_{i,j+2} + T_{i,j+3} - 3T_{i,j+4}) + O(h^4)$	(3.81)
4	$T_{i,j} = \frac{1}{25} [48T_{i,j+1} - 36T_{i,j+2} + 16T_{i,j+3} - 3T_{i,j+4} - 12h \frac{\partial T}{\partial y} \Big _{i,j}] + O(h^5)$	(3.82)

3.4.3. Интегральный метод

Для построения конечно-разностных аналогов уравнений в частных производных можно использовать интегральные методы, основанные на интегрировании этих уравнений. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.83)$$

Попробуем построить разностную схему путем интегрирования уравнения теплопроводности по t и x в окрестности узла (n, j) разностной сетки. Этот узел будем иногда также обозначать как точку (t_0, x_0) . Шаги разностной сетки обозначим Δx и Δt . Так как выбор области интегрирования произволен, то проинтегрируем уравнение (3.83) от t_0 до $t_0 + \Delta t$ и от $x_0 - \Delta x/2$ до $x_0 + \Delta x/2$. Выбор интервала интегрирования от $t_0 - \Delta t/2$ до $t_0 + \Delta t/2$ приведет к абсолютно неустойчивой разностной

схеме. К сожалению, на этом этапе построения разностной схемы для решения уравнения в частных производных нельзя сказать, какие интервалы интегрирования целесообразно выбрать для обеспечения устойчивости численного метода. На этот вопрос можно ответить, либо проведя расчеты, либо проанализировав устойчивость уже построенной разностной схемы методами, описанными в § 3.6. Порядок интегрирования в каждой части уравнения выбирается так, чтобы использовать точные дифференциалы:

$$\int_{x_0 - \Delta x/2}^{x_0 + \Delta x/2} \left(\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dx = \alpha \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left(\int_{x_0 - \Delta x/2}^{x_0 + \Delta x/2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dt. \quad (3.84)$$

Взяв точно внутренние интегралы, получим

$$\begin{aligned} & \int_{x_0 - \Delta x/2}^{x_0 + \Delta x/2} [u(t_0 + \Delta t, x) - u(t_0, x)] dx = \\ & = \alpha \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(t, x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(t, x_0 - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Для вычисления оставшихся интегралов воспользуемся теоремой о среднем значении. Из этой теоремы следует, что для любой непрерывной функции $f(y)$

$$\int_{y_1}^{y_1 + \Delta y} f(y) dy = f(\tilde{y}) \Delta y, \quad (3.86)$$

где \tilde{y} — некоторое значение y из интервала $y_1 \leq \tilde{y} \leq y_1 + \Delta y$. В соответствии с этой теоремой любое y из указанного интервала позволяет получить приближенное значение интеграла от непрерывной функции:

$$\int_{y_1}^{y_1 + \Delta y} f(y) dy \approx f(\tilde{y}) \Delta y, \quad y_1 \leq \tilde{y} \leq y_1 + \Delta y.$$

Для дальнейшего упрощения интеграла (3.85) при помощи теоремы о среднем значении возьмем значение подынтегральной функции при $\tilde{x} = x_0$, а при вычислении интеграла в правой части — при $\tilde{t} = t_0 + \Delta t$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & [u(t_0 + \Delta t, x_0) - u(t_0, x_0)] \Delta x = \\ & = \alpha \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(t_0 + \Delta t, x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(t_0 + \Delta t, x_0 - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Для выражения результата в алгебраической форме выразим производную $\partial u/\partial x$ через значения функции u в узлах разностной сетки. Для этого можно использовать уже известные нам аппроксимации, например центральные разности. С другой стороны, мы можем придерживаться чисто интегрального метода и на основе теоремы о среднем значении получим

$$\begin{aligned} u(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x) &= u(t_0 + \Delta t, x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \frac{\partial u}{\partial x}(t_0 + \Delta t, x) dx \approx \\ &\approx u(t_0 + \Delta t, x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(t_0 + \Delta t, x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Из последнего соотношения следует

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(t_0 + \Delta t, x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \approx \frac{u(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x) - u(t_0 + \Delta t, x_0)}{\Delta x}. \quad (3.89)$$

При вычислении интеграла в правой части (3.88) по теореме о среднем значении мы произвольно выбрали $\bar{x} = x_0 + \Delta x/2$ (средняя точка интервала), поэтому интеграл в правой части вычисляется приближенно. Найдя аналогично конечно-разностные аппроксимации остальных первых производных, получим конечно-разностный аналог уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} [u(t_0 + \Delta t, x_0) - u(t_0, x_0)] \Delta x &= \\ &= \frac{\alpha}{\Delta x} [u(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x) - 2u(t_0 + \Delta t, x_0) + \\ &\quad + u(t_0 + \Delta t, x_0 - \Delta x)] \Delta t. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Обозначая значения функций в узлах индексами n, j , где n — номер шага по времени, а j — номер шага по пространственной координате, перепишем (3.90) в виде

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}). \quad (3.91)$$

Последнее выражение совпадает с полностью неявной схемой для уравнения теплопроводности, приведенной в п. 3.4.1. Неявная разностная схема получена благодаря тому, что интеграл в правой части вычислялся по теореме о среднем при значении подынтегральной функции в момент времени $t_0 + \Delta t$. Если бы при вычислении этих интегралов были использованы значения подынтегральной функции при $t = t_0$, то мы получили бы явную схему. Отметим, что при применении описанного в этом разделе метода построения разностных схем погрешность аппроксимации в явном виде не получается и должна быть найдена.

3.4.4. Метод контрольного объема

Метод контрольного объема принципиально отличается от уже рассмотренных методов построения разностных схем для уравнений в частных производных. Используя методы, основанные на разложении функций в ряд Тейлора, и интегральные методы, мы предполагали, что уравнения в частных производных корректно и в соответствующей форме описывают законы сохранения, поэтому при построении разностной схемы мы просто обращались к математическим средствам. При таком подходе физические законы сохранения применяются лишь при выводе уравнения в частных производных и никак не используются при построении разностной схемы. В этом смысле разложение в ряд Тейлора и интегральные методы — формальные методы построения разностных схем для уравнений в частных производных.

При использовании метода контрольных объемов разностная схема строится на основе физических законов сохранения, следствием которых является рассматриваемое уравнение в частных производных. Сначала этот закон сохранения формулируется словесно для некоторого контрольного объема, окружающего узел разностной сетки, а потом записывается математически с учетом дискретной сетки. Описанная процедура во многом похожа на ту, с помощью которой уравнения в частных производных выводятся из физических законов сохранения, не проводится лишь переход к пределу при стягивании контрольного объема в точку. Если уравнение в частных производных записано в дивергентной форме, то закон сохранения можно получить, интегрируя это уравнение по контрольному объему и используя формулу Гаусса — Остроградского. На практике метод контрольных объемов позволяет обычно строить более точные вблизи границ разностные схемы, чем другие методы. Возможно, это связано с тем, что этот метод сохраняет дискретную природу решения задачи на всех этапах построения разностной схемы.

В качестве примера рассмотрим двумерный установившийся процесс распространения тепла в твердом теле с постоянным коэффициентом теплопроводности. Как известно, распределение температуры удовлетворяет в этом случае уравнению Лапласа (3.72).

Решение задачи начнем с построения разностной сетки. Сначала расположим узлы сетки на границе расчетной области, так как температура границы входит в граничное условие. Затем разобьем всю область решения на контрольные объемы, каждый из которых содержит лишь один узел разностной сетки. Границы контрольных объемов удобнее всего проводить посредине между смежными узлами, хотя при этом узлы разностной

сетки окажутся в центрах контрольных объемов лишь в случае равномерной сетки, т. е. при $\Delta x = c_1$, $\Delta y = c_2$.

Рассмотрим сначала контрольный объем, не прилегающий к границе, например объем A на рис. 3.7. Так как рассматривается установившийся процесс, то суммарный поток тепла через границу контрольного объема A должен равняться нулю. Именно из этого закона сохранения выводится уравнение Лапласа для температуры, описывающее распределение температуры внутри области. Этот закон можно вывести также из исходного уравнения в частных производных, воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского.

По закону Фурье тепловой поток пропорционален градиенту температуры: $\mathbf{q} = -k\nabla T$. Следовательно, если k — константа, то уравнение (3.72) можно переписать в виде

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (k\nabla T) = 0.$$

Рис. 3.7. Конечно-разностная сетка, используемая при решении уравнений методом контрольного объема; T_∞ , h заданы на границе l .

Интегрируя это уравнение по контрольному объему и используя теорему о дивергенции Гаусса — Остроградского, получим

$$\iiint_R \nabla \cdot (k\nabla T) dR = \iint_S (k\nabla T) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Интеграл в правой части описывает суммарный поток тепла через границу контрольного объема. Представляя этот интеграл в виде суммы потоков через все границы контрольного объема с центром в узле (i, j) , получим

$$\begin{aligned} -k \Delta y \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-1/2, j} + k \Delta y \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i+1/2, j} - k \Delta x \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i, j-1/2} + \\ + k \Delta x \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i, j+1/2} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $1/2$ в нижнем индексе указывает на то, что соответствующая величина вычисляется в центре грани объема (посередине между узлами сетки). Законы сохранения энергии выполняются точно, если на границах для производных выбраны подходящие средние значения. Используя центральные разности, получаем

$$\begin{aligned} k \Delta y \frac{(T_{i-1, j} - T_{i, j})}{\Delta x} + k \Delta y \frac{(T_{i+1, j} - T_{i, j})}{\Delta x} + k \Delta x \frac{(T_{i, j-1} - T_{i, j})}{\Delta y} + \\ + k \Delta x \frac{(T_{i, j+1} - T_{i, j})}{\Delta y} = 0. \end{aligned}$$

Разделив это уравнение на $k\Delta x\Delta y$, находим

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = 0. \quad (3.92)$$

В последнем уравнении каждое из двух слагаемых совпадает с аппроксимацией вторых производных $\partial^2 T/\partial x^2$ и $\partial^2 T/\partial y^2$, полученной ранее при помощи рядов Тейлора.

Рассмотрим теперь прилегающий к границе контрольный объем, обозначенный на рис. 3.7 буквой B . Пусть граничное условие для исходной (не дискретизированной) задачи имеет вид $h(T_\infty - T_{i,j}) = -k\partial T/\partial x|_{i,j}$, где (i,j) — точка на физической границе области, соответствующей границе контрольного объема B . Если бы применили метод разложения в ряд Тейлора для задания граничных условий, то нашим следующим шагом было бы построение конечно-разностного аналога производной $(\partial T/\partial x)_{i,j}$. Аппроксимируя производные односторонними разностями вперед, граничное условие получаем в виде

$$h(T_\infty - T_{i,j}) = \frac{k}{\Delta x} (T_{i,j} - T_{i+1,j}). \quad (3.93)$$

Следует заметить, что при применении метода контрольного объема необходимо обеспечить выполнение закона сохранения в прилегающем к границе объеме. Приравняем нулю суммарный поток тепла через границу:

$$h\Delta y(T_\infty - T_{i,j}) + k\Delta y \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i+1/2,j} + \frac{k\Delta x}{2} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,j+1/2} - \frac{k\Delta x}{2} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,j-1/2} = 0. \quad (3.94)$$

Применяя для аппроксимации производных центральные разности, получаем

$$h\Delta y(T_\infty - T_{i,j}) + k\Delta y \frac{(T_{i+1,j} - T_{i,j})}{\Delta x} + \frac{k\Delta x}{2} \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j})}{\Delta y} + \frac{k\Delta x}{2} \frac{(T_{i,j-1} - T_{i,j})}{\Delta y} = 0. \quad (3.95)$$

Разделив на k , приведем это соотношение к виду

$$\frac{h\Delta y}{k} T_\infty + \frac{\Delta y}{\Delta x} T_{i+1,j} + \frac{\Delta x}{2\Delta y} (T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - \left(\frac{h\Delta y}{k} + \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) T_{i,j} = 0. \quad (3.96)$$

Эта запись граничного условия несколько отличается от записи граничного условия в виде (3.93), полученной при формальной

аппроксимации производной $\partial T/\partial x|_{i,j}$ с помощью рядов Тейлора.

Сравнивая метод контрольного объема и метод построения разностных схем, основанный на разложении решения в ряд Тейлора, можно заметить, что последний позволяет построить конечно-разностную аппроксимацию всех входящих в дифференциальное уравнение производных путем суммирования конечно-разностных аналогов входящих в него производных. В противоположность ему метод контрольного объема, основанный на применении физических законов сохранения, дает возможность построить лишь конечно-разностный аналог всего уравнения в частных производных, однако в принципе с его помощью нельзя построить конечно-разностный аналог какой-то отдельно взятой производной, например производной du/dx . Отличительной особенностью метода контрольного объема является то, что он обеспечивает «баланс» физической величины в окрестности узла разностной сетки. Метод контрольных объемов учитывает дискретный характер решения поставленной задачи, поэтому он обеспечивает выполнение законов сохранения в конечной области, а не только в точке при стремлении шага сетки к нулю. Конечно-разностные схемы, построенные методом контрольных объемов, почти всегда консервативны.

Трудно понять, чем могут отличаться разностные схемы, построенные для уравнения в частных производных всеми четырьмя указанными в этой главе методами, не рассмотрев большое количество примеров. Часто, особенно для линейных уравнений в частных производных, при использовании различных методов получаются одни и те же разностные схемы. Ни один из рассмотренных методов не гарантирует устойчивости построенной разностной схемы, поэтому построенная любым из этих методов разностная схема может оказаться бесполезной. Наиболее заметно отличие построенных различными методами разностных схем при использовании неортогональных систем координат и при аппроксимации записанных в недивергентной форме уравнений.

§ 3.5. Применение нерегулярных сеток

Наиболее удобными для проведения расчетов являются регулярные сетки с постоянными шагами Δx , Δy во всей расчетной области. Однако на практике такие сетки часто использовать не удается либо из-за того, что граница расчетной области не совпадает с узлами регулярной сетки, либо из-за необходимости сгущать сетку в некоторых подобластях для достижения требуемой точности решения задачи. При решении физических про-

блем нерегулярные сетки приходится использовать довольно часто, поэтому в вычислительной гидродинамике и теплообмене их применению уделяется довольно большое внимание. На практике, прежде чем вводить нерегулярную сетку, имеет смысл попробовать применить преобразование координат, позволяющее согласовать форму границы и регулярную сетку. Подробно различные преобразования координат будут рассмотрены в § 5.6.

3.5.1. Нерегулярные сетки, вводимые из-за формы границы области

В качестве примера рассмотрим случай, когда для решения задачи построена регулярная сетка с квадратными ячейками, т. е. $\Delta x = \Delta y = \text{const}$, но одна из границ расчетной области криволинейна. Вследствие этого расстояние от внутреннего узла сетки до границы непостоянно и отлично от шага сетки (рис. 3.8). Пусть мы хотим решить уравнение Лапласа при заданном на границе области значении искомой функции u . Для этой задачи ввести нерегулярную сетку можно несколькими различными методами, выписанными ниже.

1. Используем вблизи границы очень мелкую равномерную сетку, перенося граничное условие в узел сетки, ближайший к границе. Если вдали от границы не использовать более грубую сетку (при этом она оказывается нерегулярной на границе подобластей с мелкой и грубой сетками), то для достижения приемлемой точности необходимо провести расчет на сетке с очень большим числом узлов.

2. Используем линейную интерполяцию для определения значения функции u в каждом узле разностной сетки, отстоящем от границы области на расстояние, меньшее шага сетки. Интерполяция проводится по заданному значению функции u на границе области и ее значениям в узлах регулярной сетки, соседних с узлом, прилежащим к границе. Например, значение функции u_P в точке P на рис. 3.8 можно определить либо по формуле

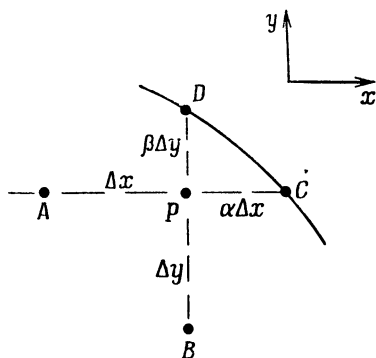


Рис. 3.8. Конечно-разностная сетка вблизи нерегулярной границы.

$$u_P = u_A + \frac{\Delta x}{\Delta x + \alpha \Delta x} (u_C - u_A),$$

либо по формуле

$$u_{P_2} = u_B + \frac{\Delta y}{\Delta y + \beta \Delta y} (u_D - u_B).$$

Можно использовать и среднее арифметическое этих двух значений: $u_P = (u_{P_1} + u_{P_2})/2$.

3. Построим конечно-разностную схему, пригодную для решения уравнения в частных производных на нерегулярной сетке.

Последнее проще всего сделать, используя интегральный метод на неравномерной сетке. Проинтегрируем дифференциальное уравнение в окрестности точки (x_0, y_0) , выбрав верхние и нижние пределы интегрирования отстоящими на полшага сетки от этой точки. Тогда в соответствии с приведенными на рис. 3.9 обозначениями получим

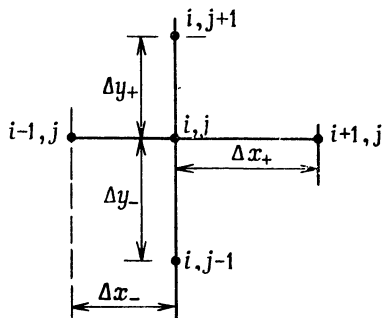


Рис. 3.9. Обозначения, используемые при решении уравнений на нерегулярной сетке.

$$\int_{y_0 - \Delta y_- / 2}^{y_0 + \Delta y_+ / 2} \left(\int_{x_0 - \Delta x_- / 2}^{x_0 + \Delta x_+ / 2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dy + \int_{x_0 - \Delta x_- / 2}^{x_0 + \Delta x_+ / 2} \left(\int_{y_0 - \Delta y_- / 2}^{y_0 + \Delta y_+ / 2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right) dx = 0. \quad (3.97)$$

Внутренние интегралы могут быть вычислены аналитически:

$$\int_{y_0 - \Delta y_- / 2}^{y_0 + \Delta y_+ / 2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(x_0 + \frac{\Delta x_+}{2}, y \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(x_0 - \frac{\Delta x_-}{2}, y \right) \right] dy + \int_{x_0 - \Delta x_- / 2}^{x_0 + \Delta x_+ / 2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \left(x, y_0 + \frac{\Delta y_+}{2} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(x, y_0 - \frac{\Delta y_-}{2} \right) \right] dx = 0.$$

Остальные интегралы можно вычислить, используя теорему о среднем значении:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(x_0 + \frac{\Delta x_+}{2}, y_0 \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(x_0 - \frac{\Delta x_-}{2}, y_0 \right) \right] \frac{\Delta y_+ + \Delta y_-}{2} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y_+}{2} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y_-}{2} \right) \right] \frac{\Delta x_+ + \Delta x_-}{2} = 0. \quad (3.98)$$

Если для аппроксимации производных в последнем соотношении воспользоваться центральными разностями, как это было сделано в п. 3.4.3, то получим следующий конечно-разностный аналог уравнения Лапласа:

$$\frac{2}{\Delta x_+ + \Delta x_-} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x_+} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x_-} \right) + \frac{2}{\Delta y_+ + \Delta y_-} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y_+} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y_-} \right) = 0. \quad (3.99)$$

Используя это выражение для точек, прилежащих к нерегулярной границе (рис. 3.8), получим следующие конечно-разностные аналоги вторых производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_P &\approx \frac{2}{\Delta x (1 + \alpha)} \left(\frac{u_C - u_P}{\alpha \Delta x} - \frac{u_P - u_A}{\Delta x} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_P &\approx \frac{2}{\Delta y (1 + \beta)} \left(\frac{u_D - u_P}{\beta \Delta y} - \frac{u_P - u_B}{\Delta y} \right). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Разностную схему (3.99) можно построить, применив также разложение функций в ряд Тейлора. При использовании нерегулярных сеток построение разностных схем методом разложения функций в ряд Тейлора требует куда больше усилий, чем в случае равномерных сеток, тогда как применение интегрального метода на равномерной и неравномерной сетках требует примерно одного и того же объема аналитических вычислений. Для определения погрешности аппроксимации и проверки условия согласованности разностной схемы (3.99) необходимо все величины разложить в ряд Тейлора в окрестности узла (i, j) . Мы предлагаем читателю проделать это в качестве упражнения. В качестве предупреждения напомним, что при аппроксимации вторых производных на равномерной сетке второй порядок погрешности аппроксимации получался вследствие сокращения членов рядов Тейлора для узлов с большим и меньшим номерами. На неравномерной сетке такое сокращение не происходит.

Если расчет проводится при примерно одинаковом числе узлов разностной сетки, следует ожидать, что метод 3 учета неравномерности сетки, вызванной формой границы, должен быть наиболее точным, так как уравнение в частных производных аппроксимируется в каждой внутренней точке (в отличие от метода 2) и положение границы не меняется (как в методе 1).

Если на нерегулярной границе задана производная искомой функции (задача Неймана), то и в этом случае можно построить необходимую разностную схему, хотя алгебраические соотношения оказываются более сложными, чем в рассмотренном случае.

Ряд простых примеров, иллюстрирующих методы построения разностных схем при задании на нерегулярной границе производной искомой функции, можно найти в работах [Forsythe, Wasow, 1960; James et al., 1967; Allen, 1954].

3.5.2. Нерегулярные сетки, не связанные с формой границы

При расчете некоторых газодинамических течений для обеспечения требуемой точности часто приходится использовать сетки с мелким шагом вблизи твердой границы (стенки) или вблизи ударных волн, т. е. в тех областях течения, где градиенты параметров велики. Для экономии времени и памяти ЭВМ целесообразно использовать более грубую сетку вдали от этих критических областей. Следовательно, для решения задач следует использовать нерегулярные или переменные сетки. Их можно строить различными методами, укажем по крайней мере два из них.

1. Можно применить преобразование координат, переводящее неравномерную сетку в физических координатах в равномерную, при этом изменяется вид уравнения в частных производных. Этот метод мы подробно опишем несколько ниже.

2. Так же как в методе 3, рассмотренном выше, можно построить конечно-разностную схему, пригодную для решения уравнения в частных производных на неравномерной сетке. Этот подход ничем не отличается от ранее описанного, просто неравномерность сетки определяется не формой границы, а особенностями решения уравнения. В качестве примера укажем на разностную схему решения уравнения Лапласа (3.99).

3.5.3. Заключительные замечания

Цель данного раздела состояла лишь в том, чтобы в общих чертах показать некоторые проблемы, возникающие в задачах с нерегулярными границами при использовании неравномерных сеток, а также описать методы их решения. Наше описание этого вопроса ни в коем случае не претендует на полноту. Дальнейшее его изучение быстро приводит к специальным задачам. Хорошая педагогика предполагает, что мы сначала продвинемся вперед и рассмотрим весь «лес», а уж потом вернемся к изучению отдельного дерева. В дальнейшем мы рассмотрим некоторые вопросы использования неравномерных сеток в связи с решением конкретных задач гидродинамики и теплообмена.

§ 3.6. Устойчивость конечно-разностных схем

Не любая согласованная конечно-разностная схема обеспечивает сходимость решения конечно-разностных уравнений к решению уравнения в частных производных. В соответствии с теоремой Лакса об эквивалентности (см. п. 3.3.4) такую сходимость решения обеспечивает лишь устойчивая разностная схема. В этой главе мы подробно рассмотрим теорию устойчивости конечно-разностных схем.

Понятие устойчивости конечно-разностных схем аналогично понятию устойчивости в теории управляемых систем. Передаточная функция в теории управляемых систем играет ту же роль, что и разностный оператор в вычислительной математике.

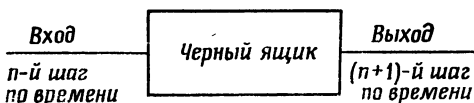


Рис. 3.10. Схематическое изображение конечно-разностной схемы как управляемой системы.

Рассмотрим маршевую задачу. Пусть на n -м шаге по времени начальные значения известны, а на $(n + 1)$ -м шаге по времени значения этих величин надо определить. Разностный оператор можно тогда интерпретировать как «черный ящик» с некоторой передаточной функцией. Схематически такая интерпретация разностного оператора показана на рис. 3.10. Устойчивость такой управляемой системы определяется преобразованием исходных данных, проводимым «черным ящиком». Из теории управления известно, что управляемая система работает устойчиво тогда и только тогда, когда все нули характеристического полинома этой системы расположены в левой полуплоскости. Если это не так, то входной сигнал усиливается неправильно, а выходной сигнал бесполезен, так как он неограниченно растет. Теория устойчивости разностных схем изучает способ, которым разностный оператор преобразует начальные значения величин в их значения на следующем шаге по времени, и является центральной проблемой анализа устойчивости.

Начнем изучение устойчивости конечно-разностных схем с анализа простой явной схемы для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Решив это уравнение относительно u_j^{n+1} , получим

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (3.101)$$

Обозначим буквой D точное решение этого разностного уравнения, т. е. решение, которое мы получили бы на ЭВМ при отсутствии ошибок округления, а буквой N — решение, полученное на реальной ЭВМ. Если A — аналитическое решение исходного уравнения в частных производных, то можно записать

$$\text{Погрешность аппроксимации} = A - D,$$

$$\text{Погрешность округления} = N - D.$$

Устойчивость конечно-разностной схемы определяется изменением погрешности в процессе вычисления. О'Брайен и др. [O'Brien et al., 1950] предложили следующую классификацию устойчивости разностных схем:

1. Если полная погрешность округления *растет* (*не растет*), то разностная схема называется *сильно неустойчивой* (*устойчивой*).

2. Если отдельная погрешность округления *растет* (*не растет*), то разностная схема называется *слабо неустойчивой* (*устойчивой*).

Обычно изучают лишь слабую устойчивость, так как для ее анализа можно использовать метод *разложения решения в ряд Фурье*, называемый в вычислительной математике *методом Неймана*. При этом предполагают, что если выполнено условие слабой устойчивости, то выполнено и условие сильной устойчивости.

3.6.1. Метод Фурье или метод Неймана

Рассмотрим разностное уравнение (3.101). Если ε — погрешность округления, то численное решение разностного уравнения можно представить в виде

$$N = D + \varepsilon. \quad (3.102)$$

Так как численное решение должно удовлетворять разностному уравнению, то, подставляя (3.102) в (3.101), получим

$$\frac{D_j^{n+1} + \varepsilon_j^{n+1} - D_j^n - \varepsilon_j^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{D_{j+1}^n + \varepsilon_{j+1}^n - 2D_j^n - 2\varepsilon_j^n + D_{j-1}^n + \varepsilon_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right).$$

Точное решение D удовлетворяет разностному уравнению (3.101), поэтому и погрешность ε удовлетворяет тому же уравнению:

$$\frac{\varepsilon_j^{n+1} - \varepsilon_j^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right). \quad (3.103)$$

Так как точное решение разностного уравнения D и погрешность округления ε удовлетворяют одному и тому же уравнению, то и растут по времени они одинаково. Если разностная схема устойчива, то рост любого возмущения, вводимого на n -м шаге по времени, ограничен; для неустойчивых конечно-разностных схем возмущение возрастает.

Рассмотрим распределение погрешности на сетке в любой момент времени. Для удобства выберем момент времени $t = 0$. Схематически это распределение погрешности показано на

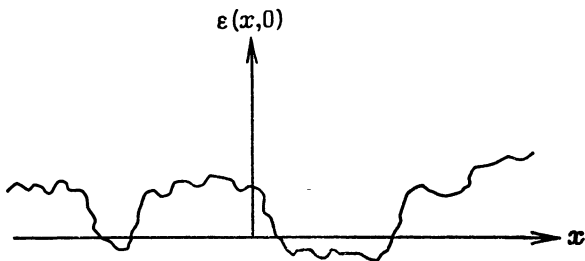


Рис. 3.11. Начальное распределение погрешности.

рис. 3.11. Предположим, что погрешность $\varepsilon(x, t)$ можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m b_m(t) e^{ik_m x}, \quad (3.104)$$

причем период основной частоты ($m = 1$) равен $2L$. Нас интересует решение в интервале длины L , поэтому волновые числа

$$k_m = m\pi/L, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M,$$

где M — число отрезков длины Δx , помещающихся в отрезке длины L . Например, если интервал длины $2L$ разбит на отрезки пятью узлами, то $M = 2$, а в сумму ряда входят лишь гармоники

$$\begin{aligned} f_m &= k_m/2\pi = m/2L, & f_1 &= 1/2L, & m &= 1, \\ f_0 &= 0, & m &= 0, & f_2 &= 1/L, & m &= 2. \end{aligned}$$

Напомним, что частота указывает на число волн, помещающихся в отрезке длины $2L$. Если $m = 0$, то $f_0 = 0$, а соответствующее слагаемое описывает стационарную составляющую решения.

Так как погрешность удовлетворяет линейному уравнению, то поведение каждой гармоники, входящей в (3.104), можно рассмотреть независимо. Рассмотрим член $\varepsilon_m(x, t) = b_m(t) e^{ik_m x}$.

Будем искать решение уравнения в виде $z^n e^{ik_m x}$. При $t = 0$ ($n = 0$) оно имеет вид $e^{ik_m x}$. Пусть $z = e^{a\Delta t}$, тогда

$$z^n = e^{an\Delta t} = e^{at}, \quad \varepsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_m x}, \quad (3.105)$$

причем k_m вещественно, но a может быть и комплексным. Подставляя (3.105) в (3.103), получим

$$e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x} = r (e^{at} e^{ik_m(x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ik_m x} + e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)}),$$

где $r = \alpha\Delta t / (\Delta x)^2$. Разделив на $e^{at} e^{ik_m x}$ и используя соотношение

$$\cos \beta = (e^{i\beta} + e^{-i\beta})/2,$$

получим

$$e^{a\Delta t} = 1 + 2r (\cos \beta - 1),$$

где $\beta = k_m \Delta x$. При помощи тригонометрического тождества

$$\sin^2(\beta/2) = (1 - \cos \beta)/2$$

перепишем последнее соотношение в окончательном виде

$$e^{a\Delta t} = 1 - 4r \sin^2(\beta/2). \quad (3.106)$$

Так как для каждой гармоники $\varepsilon_j^{n+1} = e^{a\Delta t} \varepsilon_j^n$, то погрешность округления не будет возрастать на каждом шаге по маршевой координате (времени), если $|e^{a\Delta t}|$ не превосходит единицы. Следовательно, разностная схема устойчива при

$$|1 - 4r \sin^2(\beta/2)| \leq 1. \quad (3.107)$$

Коэффициент $1 - 4r \sin^2(\beta/2)$ (равный отношению $\varepsilon_j^{n+1}/\varepsilon_j^n$) называют *коэффициентом* (или множителем) *перехода* и обозначают через G . Отметим, что при анализе Фурье устойчивости конечно-разностных схем реальные граничные условия не учитываются; вместо них для гармоник выставляют обычно периодические граничные условия.

При решении неравенства (3.107) надо рассмотреть два возможных случая:

1. Если $(1 - 4r \sin^2(\beta/2)) > 0$, то $4r \sin^2(\beta/2) > 0$.
2. Если $(1 - 4r \sin^2(\beta/2)) < 0$, то $4r \sin^2(\beta/2) - 1 \leq 1$.

Первое неравенство выполняется для всех $r > 0$, а второе — лишь при $r \leq 1/2$. Последнее неравенство и является условием устойчивости рассматриваемой конечно-разностной схемы; оно накладывает ограничение на соотношение шагов по времени и пространственной координате. Теперь можно легко объяснить, почему в примере, приведенном в конце п. 3.3.3, получались физи-

чески нереальные значения температуры. Шаг Δt в этом примере был вдвое больше максимально допустимого условием устойчивости конечно-разностной схемы, поэтому решение резко росло. При $\alpha(\Delta t/\Delta x^2) = 1/2$ устойчивость рассматриваемой разностной схемы легко проверить. Следует заметить, что выражение (3.106) для коэффициента перехода можно получить при помощи подстановки разложения погрешности в ряд Фурье (3.104) в конечно-разностное уравнение. Мы предлагаем читателю проделать это в качестве упражнения.

Метод Неймана (или Фурье) применим и к анализу конечно-разностных схем решения уравнений гиперболического типа. В качестве примера рассмотрим одномерное волновое уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.108)$$

описывающего распространение волны, бегущей со скоростью c . Это уравнение имеет только одно семейство характеристик, являющихся решением характеристического уравнения $x_t = c$. Общее решение уравнения (3.108) имеет вид

$$u(x - ct) = \text{const.}$$

Это решение требует, чтобы начальные данные, заданные при $t = 0$, без изменения переносились вдоль характеристик.

Лакс [Lax, 1954] предложил конечно-разностную схему первого порядка для решения уравнений такого типа:

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} \right). \quad (3.109)$$

Первое слагаемое в правой части есть среднее значение неизвестной на предыдущем шаге по времени, а второе — конечно-разностный аналог первой производной по пространству. Пусть $u_j^n = e^{at} e^{ik_m x}$. Подставляя это выражение в разностное уравнение, получим, что коэффициент перехода принимает вид

$$e^{a\Delta t} = \cos \beta - iv \sin \beta.$$

Следовательно, схема Лакса устойчива при

$$|\cos \beta - iv \sin \beta| \leq 1,$$

где параметр $v = c\Delta t/\Delta x$ называется *числом Куранта*. Так как квадрат модуля комплексного числа равен сумме квадратов его вещественной и мнимой частей, то рассматриваемая конечно-разностная схема устойчива при

$$|v| \leq 1. \quad (3.110)$$

Следовательно, и в этом случае устойчивость конечно-разностной схемы определяется соотношением шагов по времени и пространственной координате. Условие (3.110) называется *условием устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви* (КФЛ), которое подробно обсуждалось в связи со сходимостью и устойчивостью в исторически важной работе Куранта и др. [Courant et al., 1928], которую обычно рассматривают как основополагающую для развития современных численных методов решения уравнений в частных производных.

Коэффициент перехода, или, как его еще иногда называют, множитель перехода, для некоторой конечно-разностной схемы зависит от шагов сетки и волнового числа. Для конечно-разностной схемы Лакса коэффициент перехода имеет вид

$$G = \cos \beta - iv \sin \beta = |G| e^{i\phi} = \sqrt{\cos^2 \beta + v^2 \sin^2 \beta} e^{i \arctg(-v \operatorname{tg} \beta)}, \quad (3.111)$$

где ϕ — фазовый угол. Из последнего соотношения ясно, как коэффициент G зависит от числа Куранта v и параметра частоты β . Зависимость коэффициента G от этих параметров построена на рис. 3.12 при разных числах Куранта в фазовой плоскости. Тщательный анализ этих кривых позволяет сделать ряд интересных выводов. Фазовый угол в методе Лакса меняется от 0 для малых частот до $-\pi$ для больших, что легко проверить, вычислив этот угол для обоих предельных случаев. При числе Куранта, равном единице, все гармоники распространяются без затуханий. При числах Куранта, меньших единицы, низкочастотные и высокочастотные гармоники меняются слабо, тогда как гармоники со средней частотой затухают довольно сильно. По представленным на рис. 3.12 кривым можно оценить и затухание по величине фазового угла.

Очень важно понять физический смысл условия КФЛ (3.110) для гиперболических уравнений. Рассмотрим волновое уравнение второго порядка

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \quad (3.112)$$

Его характеристики имеют вид

$$x + ct = \text{const} = c_1,$$

$$x - ct = \text{const} = c_2.$$

Решение в точке (x, t) , как показано на рис. 3.13, зависит лишь от условий, заданных между пересекающимися в этой точке характеристиками. Следовательно, аналитическое решение в точке (x, t) зависит лишь от информации, содержащейся в области между характеристиками c_1 и c_2 .

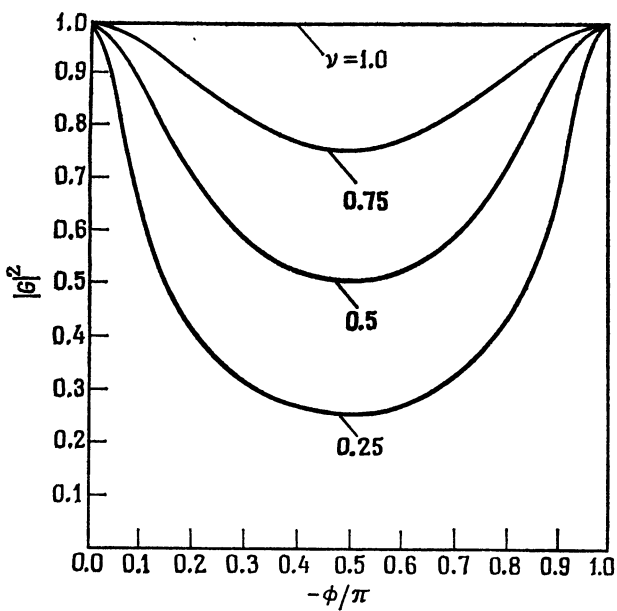


Рис. 3.12. Зависимость модуля коэффициента перехода от фазы при различных числах Куранта для схемы Лакса.

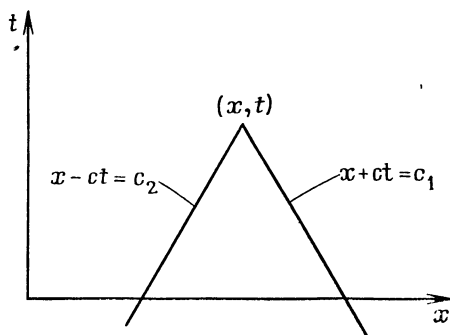


Рис. 3.13. Характеристики одномерного волнового уравнения второго порядка.

Условием устойчивости большинства явных схем решения гиперболических уравнений в частных производных является условие КФЛ, имеющее вид $|c\Delta t/\Delta x| \leq 1$, т. е. то же условие, что и (3.110). Его можно представить в другой форме:

$$(\Delta t/\Delta x)^2 \leq 1/c^2.$$

Тангенс угла наклона характеристик $dt/dx = \pm 1/c$. Следовательно, условие КФЛ эквивалентно требованию, чтобы область зависимости аналитического решения лежала внутри области зависимости численного решения. Область зависимости численного решения может быть шире области зависимости аналитического решения, но не наоборот. Возможна и простая геометрическая интерпретация условия КФЛ: угол наклона прямых, соединяющих узлы $(j \pm 1, n)$ и $(j, n + 1)$, по абсолютной величине должен быть меньше угла наклона характеристик. Условие КФЛ имеет физический смысл. На основе проведенных рассуждений можно ожидать, что численное решение будет ухудшаться, если слишком много излишней информации о течении учитывается в данной точке, т. е. если величина $c(\Delta t/\Delta x)$ сильно отличается от единицы. При численных расчетах так и получается. При применении явных схем для решения гиперболических уравнений наиболее точные результаты получены для близких к единице чисел Куранта. Напомним, что к этому же выводу мы пришли при анализе коэффициента перехода в методе Лакса (см. рис. 3.12).

Прежде чем перейти к описанию методов анализа устойчивости конечно-разностных схем для решения систем уравнений в частных производных, приведем пример применения метода Неймана к анализу устойчивости конечно-разностных схем для решения уравнений с большим числом независимых переменных.

Пример 3.4. Определить условие устойчивости простой явной схемы для решения двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Конечно-разностный аналог рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1} = & u_{j,k}^n + r_x (u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n) + \\ & + r_y (u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n). \end{aligned}$$

Здесь $r_x = \alpha(\Delta t/\Delta x^2)$, а $r_y = \alpha(\Delta t/\Delta y^2)$. Будем искать решение в виде суммы гармоник вида

$$u_{j,k}^n = e^{at} e^{ik_x x} e^{ik_y y}.$$

Если $\beta_1 = k_x \Delta x$, $\beta_2 = k_y \Delta y$, то

$$e^{a\Delta t} = 1 + 2r_x (\cos \beta_1 - 1) + 2r_y (\cos \beta_2 - 1).$$

Используя тригонометрическое тождество $\sin^2(\beta/2) = (1 - \cos \beta)/2$, для коэффициента перехода получим выражение

$$G = 1 - 4r_x \sin^2 \frac{\beta_1}{2} - 4r_y \sin^2 \frac{\beta_2}{2}.$$

Следовательно, разностная схема устойчива при

$$|1 - 4r_x \sin^2(\beta_1/2) - 4r_y \sin^2(\beta_2/2)| \leq 1,$$

т. е. при

$$4r_x \sin^2 \beta/2 + 4r_y \sin^2 \beta/2 \leq 2.$$

Последнее условие выполняется лишь при $r_x + r_y \leq 1/2$. Возвращаясь к шагам разностной сетки, получим условие устойчивости в виде

$$\alpha \Delta t [1/(\Delta x)^2 + 1/(\Delta y)^2] \leq 1/2.$$

Это условие аналогично полученному в одномерном случае, хотя эффективный шаг по времени в двумерном случае оказывается меньше, чем в одномерном. В рассмотренном примере результат удалось получить довольно легко, но в большинстве случаев провести анализ устойчивости конечно-разностной схемы решения уравнения в частных производных очень трудно для более чем одной пространственной переменной и времени. Условие устойчивости удается часто определить, лишь вычислив коэффициент перехода для различных значений r_x и r_y .

3.6.2. Анализ устойчивости систем уравнений в частных производных

Описанный в предыдущем разделе метод Неймана может быть использован и для анализа устойчивости конечно-разностных схем решения систем уравнений в частных производных. Встречающиеся в газовой динамике и теплопередаче системы уравнений можно обычно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (3.113)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{F} — векторы, причем $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{E})$. Обычно система уравнений является нелинейной, а методы анализа устойчивости

развиты лишь для линейных уравнений. Поэтому перепишем нашу систему в виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{E}} \right] \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0. \quad (3.114)$$

Обозначая матрицу Якоби $[\partial F/\partial \mathbf{E}]$ через $[A]$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + [A] \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0.$$

Для линеаризации системы уравнений предположим, что матрица $[A]$ остается неизменной, а вектор \mathbf{E} изменяется при расчете на одном шаге по времени. Аналогично поступают и при применении метода Неймана к анализу устойчивости одного нелинейного уравнения в частных производных.

Сначала проанализируем устойчивость метода Лакса решения системы уравнений в частных производных

$$\mathbf{E}_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left([I] + \frac{\Delta t}{\Delta x} [A]^n \right) \mathbf{E}_{j-1}^n + \frac{1}{2} \left([I] - \frac{\Delta t}{\Delta x} [A]^n \right) \mathbf{E}_{j+1}^n. \quad (3.115)$$

Здесь все обозначения имеют тот же смысл, что и раньше, а $[I]$ — единичная матрица. Для анализа устойчивости применим метод Неймана. Подставляя любой член ряда Тейлора в (3.115), получим выражение вида

$$\mathbf{e}^{n+1}(k) = [G(\Delta t, k)] \mathbf{e}^n(k), \quad (3.116)$$

где

$$[G] = [I] \cos \beta - i \frac{\Delta t}{\Delta x} [A] \sin \beta, \quad (3.117)$$

а \mathbf{e}^n — коэффициент Фурье. Матрица $[G]$ называется *матрицей перехода*, она зависит от шага по времени и частоты, т. е. $[G] = [G(\Delta t, k)]$. Если конечно-разностная схема устойчива, то максимальное собственное значение σ_{\max} матрицы $[G]$ должно удовлетворять условию

$$|\sigma_{\max}| \leq 1, \quad (3.118)$$

откуда следует, что разностная схема устойчива при

$$\left| \lambda_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1, \quad (3.119)$$

где λ_{\max} — максимальное собственное значение матрицы $[A]$, т. е. матрицы Якоби системы. Приведем простой, но важный пример.

Пример 3.5. Определить необходимое условие устойчивости метода Лакса решения системы уравнений в частных производ-

ных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

В рассматриваемом случае

$$E = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Перепишем систему в матричном виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + [A] \frac{\partial E}{\partial x} = 0,$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, максимальное собственное значение матрицы $[A]$ равно c и конечно-разностная схема устойчива при выполнении обычного условия устойчивости КФЛ

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1.$$

Отметим, что описанный выше метод анализа устойчивости конечно-разностных схем не учитывает влияния граничных условий, хотя и использует матричную запись системы уравнений в частных производных. Как учесть влияние граничных условий, будет показано ниже.

Соотношение (3.116) показывает, что устойчивость конечно-разностной схемы определяется видом матрицы перехода. Перепишем (3.116) в виде

$$e^{n+1}(k) = [G(\Delta t, k)]^n [e^1(k)]. \quad (3.120)$$

Теперь можно сформулировать условие устойчивости разностной схемы [Richtmyer, Morton, 1967]. Оно сводится к требованию существования такого положительного τ , чтобы матрица $[G(\Delta t, k)]^n$ была равномерно ограничена при $0 < \Delta t < \tau$, $0 \leq n \Delta t \leq T$ для любых k , где T — максимальное время. Отсюда следует *необходимое условие устойчивости Неймана*:

$$|\sigma_i(\Delta t, k)| \leq 1 + O(\Delta t) \text{ при } 0 < \Delta t < \tau \quad (3.121)$$

для всех собственных значений и волновых чисел, где σ_i — собственные значения матрицы $[G(\Delta t, k)]$.

В рассмотренных примерах мы считали конечно-разностную схему устойчивой, если максимальное собственное значение

матрицы перехода по модулю не превосходит единицы. Это условие более сильное, чем (3.118). Необходимое условие устойчивости Неймана накладывает требование приемлемого роста локальной величины $c\Delta t$, что в действительности возможно для решения многих физических задач. Классическим примером, иллюстрирующим это, является разностная схема решения уравнения теплопроводности с источниковым членом.

Пример 3.6. Пусть мы хотим решить уравнение теплопроводности с источниковым членом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu,$$

используя простую явную конечно-разностную схему. Применяв анализ Фурье, найдем коэффициент перехода

$$G = 1 - 4r \sin^2(\beta/2) + c\Delta t.$$

Отсюда следует, что решение данного разностного уравнения может расти по времени и удовлетворяет необходимому условию устойчивости Неймана. Мы видим, что при анализе устойчивости разностных схем полезно привлекать физические соображения. Следует помнить, что для системы гиперболических уравнений строгое условие заключается в том, что максимальное собственное значение не должно превосходить по модулю единицу. Это связано с тем, что гиперболические уравнения аналогичны волновому и не имеют экспоненциально растущих по времени решений.

Мы исследовали устойчивость различных конечно-разностных схем, используя метод Неймана. Если мы хотим изучить влияние граничных условий на устойчивость конечно-разностной схемы, то мы должны использовать *матричный метод*. Это проще всего показать на примере применения метода Лакса к решению одномерного линейного волнового уравнения первого порядка

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Пусть сетка по x состоит из m точек, а граничные условия периодические, т. е.

$$u_{m+1}^n = u_1^n. \quad (3.122)$$

Применяя для решения этой задачи метод Лакса, получим систему алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{u}^{n+1} = [X] \mathbf{u}^n, \quad (3.123)$$

где

$$\mathbf{u}^n = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T, \quad (3.124)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1+\nu}{2} \\ \frac{1+\nu}{2} & 0 & \frac{1-\nu}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1+\nu}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1-\nu}{2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1+\nu}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.125)$$

Устойчивость конечно-разностной схемы (3.123) зависит от собственных значений матрицы $[X]$. Так как заданы периодические граничные условия, то в матрице $[X]$ существенны лишь элементы на трех отмеченных в соотношении (3.125) диагоналях и два угловых элемента. Такая матрица называется *апериодической* [Lomax et al., 1970]. Для матрицы вида

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & a_1 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

собственные значения имеют вид

$$\lambda_j = a_1 + (a_0 + a_2) \cos \frac{2\pi}{m}(j-1) + i(a_0 - a_2) \sin \frac{2\pi}{m}(j-1), \\ j = 1, m.$$

В рассматриваемом случае

$$a_0 = \frac{1+\nu}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1-\nu}{2}$$

и собственные значения имеют вид

$$\lambda_j = \cos \frac{2\pi}{m}(j-1) + iv \sin \frac{2\pi}{m}(j-1). \quad (3.127)$$

Итак, конечно-разностная схема устойчива при $|v| \leq 1$, т. е. при выполнении условия КФЛ. Это показывает, что матричный анализ устойчивости схемы Лакса привел к тем же результатам, что и метод Неймана для простого волнового уравнения. При периодических граничных условиях матричный метод и метод Неймана приводят по существу к тождественным результатам. Проиллюстрируем влияние граничных условий и разностной сетки на другом примере.

Пусть, как и в предыдущем примере, метод Лакса применяется к решению одномерного линейного волнового уравнения первого порядка. Ограничимся случаем, когда для решения уравнения используются лишь четыре точки по пространственной координате. В первой и четвертой точках зададим граничные условия. Предположим для простоты, что в первой точке величина u постоянна для всех времен, тогда граничное условие можно записать в виде $u_1^{n+1} = u_1^n$. Так как мы ищем решение волнового уравнения, то граничное условие в четвертой точке на правом конце не может быть произвольным, а должно быть согласовано с направлением распространения волны. Зададим его в виде $u_4^{n+1} = u_3^n$, т. е. будем определять значение функции u на границе по ее значению во внутреннем узле сетки на предыдущем слое. При таких граничных условиях матрица $[X]$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1+v}{2} & 0 & \frac{1-v}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+v}{2} & 0 & \frac{1-v}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы легко вычисляются. Они равны

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1-v)(3+v)}.$$

Условие $|\lambda| \leq 1$ приводит к тем же ограничениям на v , что и условие КФЛ: $|v| \leq 1$.

В рассмотренном примере граничные условия не изменили условия КФЛ устойчивости схемы. Однако граничные условия обычно изменяют условия устойчивости и этого следует ожидать.

Ясно, что матричный метод анализа устойчивости разностных схем учитывает заданные на сетке граничные условия. Это означает, что при матричном методе анализа влияние граничных условий автоматически учитывается. К сожалению, определить аналитически собственные значения матриц при произвольно заданных граничных условиях обычно не удается.

В этом разделе проведен анализ устойчивости конечно-разностных схем при помощи метода Фурье (метода Неймана) и матричного метода. Эти два метода широко применяются для анализа устойчивости разностных схем. Однако разработаны и часто используются и другие методы. В этой связи укажем на работы [Hirt, 1968] и [Warming, Hyett, 1974]. Наиболее всесторонний математический анализ устойчивости конечно-разностных схем с доказательством многих теорем изложен в монографии Рихтмайера и Мортон [Richtmyer, Morton, 1967].

Задачи

3.1. Покажите, что

$$\left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{i,j} = \frac{\Delta_x^3 u_{i,j}}{(\Delta x)^3} + O(\Delta x).$$

3.2. Рассмотрите функцию $f(x) = e^x$. Определите на сетке с шагом $\Delta x = 0.1$ производную $f'(x)$ при $x = 2$, используя разности вперед (3.26), центральные разности (3.28) и трехточечную аппроксимацию второго порядка (3.29). Сравните полученные результаты с точным значением производной. Повторите вычисления при $\Delta x = 0.2$. Правильно ли описывает точность аппроксимации производной порядок погрешности аппроксимации? Проанализируйте полученный результат.

3.3. Проверьте, является ли консервативной конечно-разностная схема для уравнения неразрывности двумерного стационарного движения несжимаемой жидкости

$$\frac{(u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i,j} - u_{i,j-1})}{2\Delta x} + \frac{(v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1})}{\Delta y} = 0,$$

где u, v — составляющие скорости по осям x и y соответственно.

3.4. Задание то же, что и в задаче 3.3, но для разностной схемы

$$\frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})}{2\Delta x} + \frac{(v_{i,j+1} - v_{i,j-1})}{2\Delta y} = 0.$$

3.5. Рассмотрите нелинейное уравнение

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

с постоянным коэффициентом μ .

(а) Записано ли оно в дивергентной форме? Если нет, то можете ли вы записать его в дивергентной форме?

(б) Постройте конечно-разностный аналог этого уравнения, используя интегральный метод.

3.6. Проверьте конечно-разностную аппроксимацию (3.50) для производной $\partial^2 u / \partial x \partial y$.

3.7. Проверьте конечно-разностную аппроксимацию (3.40) для производной $\partial^2 u / \partial x^2$.

3.8. Проверьте соотношение (3.79) в табл. 3.3.

3.9. Проверьте соотношение (3.80) в табл. 3.3.

3.10. Проверьте следующую конечно-разностную аппроксимацию дифференциального оператора в точке (i, j) при $\Delta x = \Delta y = h$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i+1, j-1} + u_{i+1, j+1} + u_{i-1, j-1} + u_{i-1, j+1} - 4u_{i,j}}{2h^2} + O(h^2).$$

3.11. Постройте в точке (i, j) конечно-разностную аппроксимацию производной $\partial^2 u / \partial y^2$ на неравномерной сетке с погрешностью аппроксимации $O(\Delta y)$, используя $u_{i, j}$, $u_{i, j+1}$, $u_{i, j-1}$. Примените метод разложения функций в ряд Тейлора. Можете ли вы на неравномерной сетке построить трехточечную аппроксимацию этой производной со вторым порядком точности? Прежде чем ответить на этот вопрос, подумайте о возможности компактной неявной записи производной.

3.12. Найдите погрешность аппроксимации в точке (i, j) конечно-разностной аппроксимации производной $\partial u / \partial y$ на равномерной сетке

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{-3u_{i, j} + 4u_{i, j+1} - u_{i, j+2}}{2\Delta y}.$$

Чему равен порядок погрешности аппроксимации?

3.13. Найдите на равномерной сетке погрешность аппроксимации производной

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i, j} \approx \frac{1}{2h} \frac{\bar{\delta}_x u_{i, j}}{1 + \bar{\delta}_x^2 / 6}.$$

3.14. Используя разложение функций в ряд Тейлора в окрестности точки $(n + 1/2, j)$, определите погрешность аппроксимации схемы Кранка — Николсона решения уравнения теплопроводности (3.71). Сравните найденную погрешность аппроксимации с полученной при разложении функций в ряд Тейлора в окрестности точки (n, j) .

3.15. Постройте на неравномерной сетке конечно-разностный аналог производной $\partial T / \partial y$ в точке (i, j) , имеющий погрешность аппроксимации $O(\Delta y)^2$, используя $T_{i, j}$, $T_{i, j+1}$, $T_{i, j+2}$.

3.16. Определите погрешность аппроксимации в точке (i, j) приведенной ниже конечно-разностной аппроксимации производной $\partial u / \partial x$ на неравномерной сетке:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i, j} \approx \frac{u_{i+1, j} - (\Delta x_+ / \Delta x_-)^2 u_{i-1, j} + [1 - (\Delta x_+ / \Delta x_-)^2] u_{i, j}}{\Delta x_- (\Delta x_+ / \Delta x_-)^2 + \Delta x_+}.$$

3.17. Пусть из решения разностных уравнений нам известно распределение температуры вблизи адиабатической стенки (т. е. граничное условие

имеет вид $\partial T/\partial y=0$), но значение температуры на самой стенке мы не знаем (рис. 3-3.1). Однако во многих случаях нам необходимо определить именно температуру стенки. Определите температуру T_1 адиабатической стенки по значениям температуры T_2, T_3 и т. д. во внутренних узлах сетки, предполагая, что вблизи стенки температура (а) меняется линейно, (б) описывается полиномом второго порядка; (с) описывается полиномом третьего порядка (укажите лишь, как вы будете строить этот полином). С какой точностью

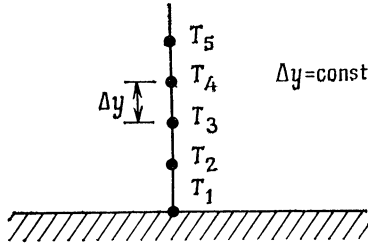


Рис. 3-3.1.

в каждом из этих случаев будет определена величина температуры стенки T_1 ?

3.18. Рассмотрим задачу определения стационарного поля температуры с теплоотдачей на границе (рис. 3-3.2). В этом случае поле температуры опи-

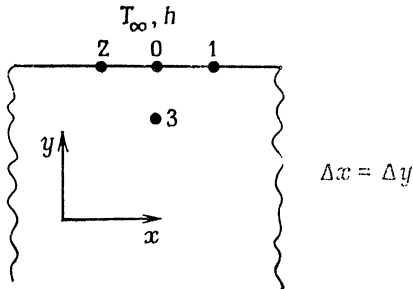


Рис. 3-3.2.

сывается уравнением Лапласа, а граничное условие имеет вид $-k\partial T/\partial y|_w = h(T_w - T_\infty)$. Простейшая конечно-разностная аппроксимация этого граничного условия имеет вид

$$-k\left[\frac{(T_0 - T_\infty)/\Delta y}{\Delta y} + \bar{c}(\Delta y)\right] = h(T_0 - T_\infty).$$

Определите граничное условие в лежащей на границе точке 0, используя метод контрольного объема. Найдите погрешность аппроксимации, предполагая, что уравнение Лапласа выполняется на границе.

3.19. Процесс распространения тепла описывается уравнением $\partial T/\partial t = \alpha(\partial^2 T/\partial x^2)$. Используя метод контрольного объема, постройте конечно-разностный аналог этого уравнения на неравномерной сетке.

3.20. Рассмотрим установившийся процесс распространения тепла в твердом теле в двумерном случае. Используя метод контрольного объема, полу-

чите в случае адиабатической стенки выражение для температуры границы изображенного на рис. 3.7 объема V .

3.21. Решите одномерное уравнение теплопроводности, используя для аппроксимации производных по времени разности вперед, а производных по пространству — центральные разности, если шаги по временной и пространственной координатам связаны соотношением $\alpha(\Delta t/\Delta x^2) = 1/2$. Используйте расчетную сетку из пяти точек, две из которых лежат на границе, а три — внутри области. Температура стенки предполагается постоянной и равной единице, а начальная температура — равной нулю. Проведите расчет для десяти шагов по времени. Сравните полученный вами результат с полученным в примере § 3.3.

3.22. Покажите, что коэффициент перехода разностной схемы решения уравнения теплопроводности (3.101) можно получить прямой подстановкой решения такого вида:

$$u_j^n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m g_m^n e^{ik_x x}.$$

Здесь C_m — коэффициенты Фурье начального распределения температуры, а g_m — коэффициент перехода. Проверьте, совпадает ли полученное выражение для g_m с (3.106). Рассмотрите вопрос о сходимости разностной схемы, воспользовавшись для этого теоремой Лакса.

3.23. Используя метод Неймана, покажите, что если для аппроксимации производных по пространству применяются центральные разности, то явный метод Эйлера решения одномерного волнового уравнения неустойчив. Разностные уравнения в этом случае имеют вид

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} \right).$$

Покажите, что аналогичный неявный метод

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2} \right)$$

устойчив.

3.24. Найдите необходимые условия устойчивости конечно-разностной схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n),$$

получающейся при решении уравнения теплопроводности методом Дюфорты—Франкла.

3.25. Покажите, что условие КФЛ является условием устойчивости схемы Лакса—Вендроффа решения одномерного волнового уравнения первого порядка. Конечно-разностное уравнение в рассматриваемом случае имеет вид

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c^2(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

3.26. Определите необходимое условие устойчивости конечно-разностной схемы решения волнового уравнения с источником членом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \alpha + ku$$

при использовании центральных разностей по пространству и разностей вперед по времени. Имеет ли для таких уравнений физический смысл необходимое условие устойчивости Неймана (3.121).

3.27. Используйте матричный метод для исследования устойчивости схемы Лакса решения одномерного волнового уравнения первого порядка на сетке, состоящей из двух внутренних и двух граничных точек, причем предполагается, что граничные условия имеют вид $u_{\text{left}} = 1$, $u_{\text{right}} = 0$.

3.28. Используйте матричный метод анализа устойчивости конечно-разностной схемы задачи 3.21 при решении уравнения теплопроводности на сетке, состоящей из пяти точек. Сколько гармоник надо ввести в этом случае?

3.29. Пусть конечно-разностная схема решения уравнения в частных производных имеет вид $u_j^{n+1} = [A] u_j^n$, где

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 + \nu & \nu & 0 \\ 0 & 1 + \nu & \lambda \\ -\nu & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix}.$$

Определите условие устойчивости этой схемы.

Применение методов конечных разностей для решения модельных уравнений

В этой главе описаны и подробно изучены различные конечно-разностные схемы, с помощью которых можно решать простейшие модельные уравнения. Мы ограничимся рассмотрением следующих модельных уравнений — волнового уравнения первого порядка, уравнения теплопроводности, уравнения Лапласа и уравнения Бюргерса. Эти уравнения называются *модельными*, так как они используются для изучения свойств решений более сложных уравнений в частных производных. Так, уравнение теплопроводности можно рассматривать как модельное для других параболических уравнений в частных производных, например уравнений пограничного слоя. Все рассматриваемые модельные уравнения имеют аналитические решения при некоторых граничных и начальных условиях. Зная эти решения, легко оценить и сопоставить различные конечно-разностные методы, используемые для решения более сложных уравнений в частных производных. Из множества существующих конечно-разностных методов решения уравнений в частных производных в этой главе описаны в основном такие методы, которые обладают свойствами, характерными для целого класса аналогичных методов. Некоторые из этих свойств нежелательны, однако в учебных целях мы рассматриваем и эти методы. Некоторые полезные для решения уравнений конечно-разностные методы не приведены, так как они аналогичны описанным в этой главе методам, а ограниченный объем книги не позволяет описать в ней все пригодные для практического использования методы.

§ 4.1. Волновое уравнение

Одномерным волновым уравнением называется следующее гиперболическое уравнение в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

Это уравнение описывает распространение звуковых волн в однородной среде со скоростью c . Существует уравнение первого

порядка, свойства решений которого близки к свойствам решения уравнения (4.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c > 0. \quad (4.2)$$

Отметим, что уравнение (4.1) можно получить из уравнения (4.2). В этом параграфе в качестве модельного уравнения выберем уравнение (4.2), которое будем называть одномерным волновым уравнением первого порядка, или просто *волновым уравнением*. Одномерное волновое уравнение является линейным гиперболическим уравнением, описывающим распространение волны со скоростью c вдоль оси x . Оно в элементарной форме моделирует нелинейные уравнения, описывающие газодинамические течения. Хотя в этой главе мы будем называть уравнение (4.2) волновым уравнением, обратим внимание читателя на то, что обычно волновым уравнением называют уравнение (4.1). Соответственно уравнение (4.2) часто называют *одномерным линейным уравнением переноса*.

Точное аналитическое решение уравнения (4.2) с начальными данными

$$u(x, 0) = F(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (4.3)$$

имеет вид

$$u(x, t) = F(x - ct). \quad (4.4)$$

Перейдем теперь к изучению конечно-разностных схем решения одномерного волнового уравнения первого порядка.

4.1.1. Явные методы Эйлера

Этот метод приводит к двум простым явным одношаговым разностным схемам

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (4.6)$$

с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, \Delta x)$ и $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$ соответственно. Обе эти схемы имеют первый порядок аппроксимации, так как главный член в выражении для погрешности имеет первый порядок (Δt или Δx для схемы (4.5) или Δt для схемы (4.6)). Разностные схемы (4.5) и (4.6) явные, так как в каждое разностное уравнение входит лишь одно неизвестное u_j^{n+1} . К сожалению, анализ устойчивости разностных схем (4.5) и (4.6) методом Неймана приводит к тому, что они обе абсолютно

неустойчивы и, следовательно, для численного решения волнового уравнения непригодны. Перейдем теперь к описанию более полезных разностных схем.

4.1.2. Метод использования разностей против потока

Простую явную схему (4.5) (метод Эйлера) можно сделать устойчивой, если при аппроксимации производной по пространству использовать не разности вперед, а разности назад в тех случаях, когда скорость волны c положительна. Если скорость волны отрицательна, то устойчивость схемы обеспечивается при использовании разностей вперед. Этот вопрос будет более подробно рассмотрен в гл. 6 при описании метода расщепления коэффициентов матриц. При использовании разностей назад разностные уравнения принимают вид

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad c > 0. \quad (4.7)$$

Эта разностная схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, \Delta x)$. Из условия устойчивости Неймана следует, что схема устойчива при

$$0 \leq v \leq 1, \quad (4.8)$$

где $v = c\Delta t/\Delta x$.

Подставим в (4.7) вместо u_j^{n+1} и u_{j-1}^n их выражения в виде ряда Тейлора. Тогда получим

$$\frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[u_j^n + \Delta t u_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt} + \frac{(\Delta t)^3}{6} u_{ttt} + \dots \right] - u_j^n \right\} + \frac{c}{\Delta x} \left\{ u_j^n - \left[u_j^n - \Delta x u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} u_{xx} - \frac{(\Delta x)^3}{6} u_{xxx} + \dots \right] \right\} = 0. \quad (4.9)$$

После несложных преобразований уравнение (4.9) приводится к виду

$$u_t + cu_x = -\frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{c\Delta x}{2} u_{tx} - \frac{(\Delta t)^2}{6} u_{ttt} - c^2 \frac{(\Delta x)^2}{6} u_{xxx} + \dots \quad (4.10)$$

В левой части последнего равенства записано исходное волновое уравнение, а в правой — погрешность аппроксимации, которая обычно отлична от нуля. Значение членов, входящих в погрешность аппроксимации, можно лучше понять, если заменить производные по времени производными по пространству. Для этого выразим производную u_{tt} через производную по x . Дифферен-

цируя (4.10) по времени, получаем

$$u_{tt} + cu_{xt} = -\frac{\Delta t}{2} u_{ttt} + \frac{c\Delta x}{2} u_{xxt} - \frac{(\Delta t)^2}{6} u_{tttt} - \frac{c(\Delta x)^2}{6} u_{xxxt} + \dots, \quad (4.11)$$

а дифференцируя (4.10) по x и умножая на $-c$, находим

$$\begin{aligned} -cu_{tx} - c^2u_{xx} &= \frac{c\Delta t}{2} u_{ttx} - \frac{c^2\Delta x}{2} u_{xxx} + \frac{c(\Delta t)^2}{6} u_{tttx} + \\ &+ \frac{c^2(\Delta x)^2}{6} u_{xxxx} + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Складывая (4.11) и (4.12), получаем

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2u_{xx} + \Delta t \left(\frac{-u_{ttt}}{2} + \frac{c}{2} u_{ttx} + O(\Delta t) \right) + \\ &+ \Delta x \left(\frac{c}{2} u_{xxt} - \frac{c^2}{2} u_{xxx} + O(\Delta x) \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Аналогично можно получить следующие выражения для производных u_{ttt} , u_{ttx} , u_{xxt} :

$$\begin{aligned} u_{ttt} &= -c^3u_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x), \\ u_{ttx} &= c^2u_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x), \\ u_{xxt} &= -cu_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из уравнений (4.10), (4.13) и (4.14) следует, что

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= \frac{c\Delta x}{2} (1 - \nu) u_{xx} - \frac{c(\Delta x)^2}{6} (2\nu^2 - 3\nu + 1) u_{xxx} + \\ &+ O((\Delta x)^3, (\Delta x)^2\Delta t, \Delta x(\Delta t)^2, (\Delta t)^3). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Уравнение, аналогичное (4.15), называют *модифицированным уравнением*¹⁾ [Warming, Hyett, 1974]. При использовании метода конечных разностей решается на самом деле модифицированное уравнение, а не исходное уравнение в частных производных. Подчеркнем, что для исключения производных по времени высших порядков необходимо использовать именно уравнение, получающееся после подстановки разложения в ряд Тейлора в разностное уравнение, т. е. уравнение (4.10), а не исходное уравнение в частных производных (4.2). Это связано с тем, что решение исходного уравнения обычно не является решением

¹⁾ В отечественной литературе *модифицированное уравнение* обычно называют *дифференциальным приближением разностной схемы* (см., например, работу [40] в списке дополнительной литературы на стр. 712). В первой части книги сохранен термин «модифицированное уравнение», а во второй части книги использован термин «дифференциальное приближение разностной схемы». — *Прим. ред.*

Таблица 4.1. Процедура определения коэффициентов модифицированного уравнения

	u_t	u_x	u_{tt}	u_{tx}	u_{xx}	u_{ttt}	u_{ttx}	u_{ttx}	u_{ttxx}	u_{txxx}
Коэффициенты (4,10)										
$-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \text{Eq. (4-10)}$	1	c	$\frac{\Delta t}{2}$	0	$-\frac{c \Delta x}{2}$	$\frac{\Delta t^2}{6}$	0	0	0	$-\frac{c \Delta x^2}{24}$
$\frac{c}{2} \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \text{Eq. (4-10)}$			$-\frac{\Delta t}{2}$	$-\frac{c \Delta t}{2}$	0	$-\frac{\Delta t^2}{4}$	0	0	$-\frac{c \Delta t \Delta x^2}{12}$	0
$\frac{1}{12} \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{Eq. (4-10)}$			$\frac{c \Delta t}{2}$	$\frac{c^2}{2} \Delta t$	0	$-\frac{c^2 \Delta t \Delta x}{4}$	0	$\frac{c \Delta t^2}{12}$	0	$\frac{c^2 \Delta t \Delta x^2}{12}$
$-\frac{1}{3} c \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \text{Eq. (4-10)}$			$\frac{1}{12} \Delta t^2$	$\frac{c \Delta t^2}{12}$	0	$-\frac{1}{3} c \Delta t^2$	0	$-\frac{c}{24} \Delta x \Delta t^2$	0	0
$\left(\frac{1}{3} c^2 \Delta t^2 - \frac{c \Delta t \Delta x}{4} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{Eq. (4-10)}$					$-\frac{1}{3} c \Delta t^2$	$-\frac{1}{3} c^2 \Delta t^2$	0	$-\frac{1}{6} c \Delta t^2$	0	$-\frac{1}{6} c^3 \Delta t^2 \Delta x$ $+\frac{c^2}{8} \Delta t \Delta x^2$
$\frac{1}{12} c \Delta t^3 \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \text{Eq. (4-10)}$					$\frac{1}{3} c^2 \Delta t^2$	$\frac{1}{3} c^2 \Delta t^2$	0	$\frac{1}{6} c^2 \Delta t^2$	0	0
$\left(\frac{1}{6} c \Delta x \Delta t^2 - \frac{1}{4} c^2 \Delta t^2 \right) \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \text{Eq. (4-10)}$					$-\frac{c \Delta t \Delta x}{4}$	$-\frac{c \Delta t \Delta x}{4}$	0	$-\frac{c \Delta t^2 \Delta x}{8}$	0	0
$\left(\frac{c}{12} \Delta t \Delta x^2 - \frac{1}{3} c^2 \Delta x \Delta t^2 + \frac{1}{4} c^3 \Delta t^2 \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \text{Eq. (4-10)}$							$\frac{1}{12} c \Delta t^3$	$\frac{c^2}{12} \Delta t^3$	$\frac{1}{6} c \Delta x \Delta t^2$	$\frac{1}{6} c^2 \Delta x \Delta t^2$ $-\frac{1}{4} c^3 \Delta t^3$ $+\frac{c}{12} \Delta t \Delta x^2$ $-\frac{1}{3} c^2 \Delta x \Delta t^2$ $+\frac{1}{4} c^3 \Delta t^3$
.....										
Коэффициенты										
	1	c	0	0	$\frac{c \Delta x}{2} (\nu - 1)$	0	0	0	$\frac{c \Delta x^2}{6} (2\nu^2 - 3\nu + 1)$	$\frac{c \Delta x^3}{24} (6\nu^3 - 12\nu^2 + 7\nu - 1)$

разностного уравнения, и так как модифицированное уравнение следует из разностного уравнения, то очевидно, что исходное уравнение в частных производных не должно использоваться для исключения производных по времени.

Производные по времени проще всего исключить, используя табл. 4.1. В первой строке таблицы выписываются коэффициенты перед каждым членом уравнения (4.10) (предварительно все члены уравнения переносятся в левую часть). Член уравнения (4.10), содержащий производную u_{tt} , можно исключить, умножив (4.10) на дифференциальный оператор $-(\Delta t/2)(\partial/\partial t)$ и прибавив результат к первой строке таблицы, т. е. к уравнению (4.10). При этом в уравнении появляется новый член $-(c\Delta t/2)u_{tx}$, который исключается умножением (4.10) на дифференциальный оператор $(c\Delta t/2)(\partial/\partial x)$ и сложением результата с первыми двумя строками таблицы. Так поступают до тех пор, пока не будет исключено требуемое число производных по времени. После этого каждый коэффициент модифицированного уравнения получается простым суммированием коэффициентов, расположенных в соответствующих столбцах таблицы. Необходимые алгебраические вычисления можно провести на ЭВМ, используя, например, язык FORMAC [Fike, 1970].

Правая часть модифицированного уравнения (4.15) является погрешностью аппроксимации, так как она равна разности решений исходного уравнения в частных производных и его конечно-разностного аналога. Следовательно, член наименьшего порядка в правой части модифицированного уравнения определяет порядок точности метода. В рассматриваемом случае метод имеет первый порядок точности, так как член наименьшего порядка имеет порядок $O(\Delta t, \Delta x)$. Если $\nu = 1$, то правая часть (4.15) равна нулю и решение разностного уравнения является точным решением исходного дифференциального уравнения. В этом случае разностная схема с разностями против потока имеет вид

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n.$$

Такая запись разностной схемы эквивалентна точному решению уравнения (4.2) методом характеристик. О конечно-разностной схеме, позволяющей получить точное решение исходного уравнения в частных производных, говорят, что она удовлетворяет «условию сдвига» [Kutler, Lomax, 1971]. Заметим, что погрешность аппроксимации равна разности точных решений модифицированного и волнового уравнений (при периодических граничных условиях).

Главный член в выражении для погрешности аппроксимации в рассматриваемом случае пропорционален производной u_{xx} , т. е.

он аналогичен диссипативному вязкому члену в одномерном уравнении движения жидкости. Например, если коэффициент вязкости μ постоянен, то вязкий член в одномерном уравнении Навье — Стокса (см. гл. 5) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) = \frac{4}{3} \mu u_{xx}. \quad (4.16)$$

Следовательно, при $\nu \neq 1$ схема с разностями против потока неявно вводит в уравнение *искусственную вязкость*, которую часто называют *неявной* (схемной) искусственной вязкостью в отличие от *явной* искусственной вязкости, которая преднамеренно

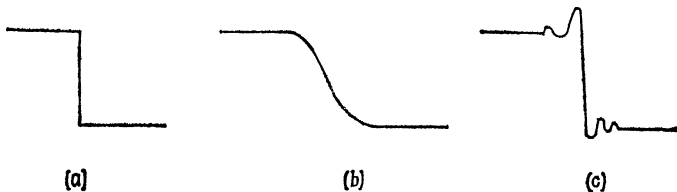


Рис. 4.1. Влияние диссипации и дисперсии. (а) Точное решение. (б) Численное решение, полученное в том случае, когда ошибка является в основном диссипативной (такое решение типично для схем первого порядка точности). (с) Численное решение, полученное в случае, когда ошибка является в основном дисперсионной (такое решение типично для схем второго порядка точности).

вводится в разностное уравнение. Искусственная вязкость сглаживает решение уравнения, уменьшая градиенты всех параметров независимо от причины возникновения этих градиентов, физической или вычислительной. Такое свойство разностной схемы, обусловленное наличием в выражении для погрешности аппроксимации производных четного порядка, называют *диссипацией* на разностной сетке.

Другое близкое к физическому свойство разностных схем называют *дисперсией*. Оно непосредственно связано с производными нечетного порядка в выражении для погрешности аппроксимации. Дисперсия приводит к искажению соотношения фаз различных волн. Совместное воздействие диссипации и дисперсии на решение иногда называют *диффузией*. Диффузия приводит к растяжению крутых линий раздела, которые могут появляться в расчетной области. На рис. 4.1 показаны эффекты диссипации и дисперсии на расчет разрыва. Обычно если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производную четного порядка, то схема обладает в основном диссипативными свойствами, а если производную нечетного порядка — то дисперсионными.

В гл. 3 мы показали, как можно определить относительную погрешность в амплитуде (диссипацию) и фазе (дисперсию) каждой гармоники, зная коэффициент перехода. Поэтому естественно возникает вопрос: есть ли какая-либо связь между коэффициентом перехода и видом модифицированного уравнения. Оказывается, что такая связь действительно существует. Уорминг и Хайет [Warming, Hyett, 1974] описали «эвристическую» теорию устойчивости разностных схем, основанную на анализе членов модифицированного уравнения с производными четного порядка, и определили погрешность, связанную с изменением

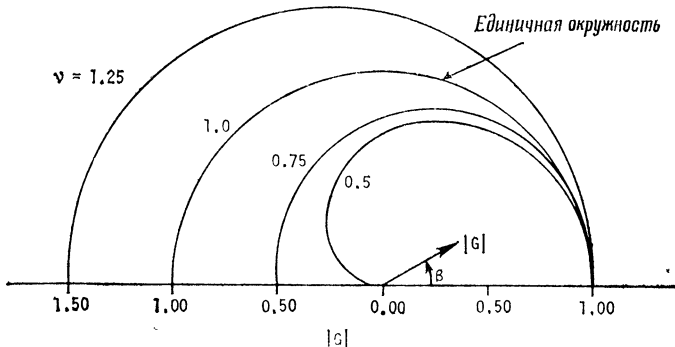


Рис. 4.2. Модуль коэффициента перехода для схемы с разностями против потока.

фазы, зная члены модифицированного уравнения с производными нечетного порядка. Прежде чем показать, как связан коэффициент перехода с видом модифицированного уравнения, запишем коэффициент перехода для рассматриваемой разностной схемы с разностями против потока в виде

$$G = (1 - \nu + \nu \cos \beta) - i(\nu \sin \beta). \quad (4.17)$$

Его модуль

$$|G| = [(1 - \nu + \nu \cos \beta)^2 + (-\nu \sin \beta)^2]^{1/2}$$

при различных ν изображен на рис. 4.2. Из представленных на нем данных видно, что условие устойчивости Неймана $|G| \leq 1$ выполняется лишь при $\nu \leq 1$.

Запишем коэффициент перехода в виде $G = |G|e^{i\phi}$, где ϕ — фазовый угол, определяемый соотношением

$$\phi = \arctg \frac{\operatorname{Im}(G)}{\operatorname{Re}(G)} = \arctg \left[\frac{-\nu \sin \beta}{1 - \nu + \nu \cos \beta} \right].$$

Фазовый угол точного решения волнового уравнения ϕ_e определяется аналогично, если известен коэффициент перехода точного

решения волнового уравнения. Для определения точного значения коэффициента перехода подставим в волновое уравнение его фундаментальное решение $u = e^{at} e^{ik_m x}$ и найдем, что $\alpha = -ik_m c$. Тогда $u = e^{ik_m(x-ct)}$ и, следовательно, коэффициент перехода для точного решения имеет вид

$$G_e = \frac{u(t + \Delta t)}{u(t)} = \frac{e^{ik_m[x-c(t+\Delta t)]}}{e^{ik_m(x-ct)}}.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$G_e = e^{-ik_m c \Delta t} = e^{i\phi_e},$$

где $\phi_e = -k_m c \Delta t = -\beta v$, причем $|G_e| = 1$.

Итак, обусловленная диссипацией суммарная ошибка в определении амплитуды после n шагов решения волнового уравне-

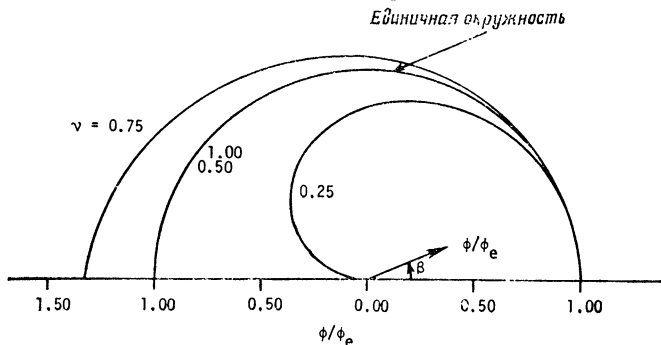


Рис. 4.3. Относительная погрешность определения фазы для схемы с разностями против потока.

ния по схеме с разностями против потока равна $(1 - |G|^n) A_0$, где A_0 — начальное значение амплитуды волны. Аналогично полную дисперсионную ошибку (искажение фазы волны) можно записать в виде $n(\phi_e - \phi)$. Относительная погрешность в определении смещения по фазе на одном шаге по времени равна

$$\frac{\phi}{\phi_e} = \frac{\arctg [(-v \sin \beta) / (1 - v + v \cos \beta)]}{-\beta v}. \quad (4.18)$$

На рис. 4.3 показано отношение ϕ/ϕ_e при различных v . При малых волновых числах (т. е. если β мало) выражение для относительной погрешности в определении фазы можно привести к виду

$$\frac{\phi}{\phi_e} \approx 1 - \frac{1}{6} (2v^2 - 3v + 1) \beta^2. \quad (4.19)$$

Если относительная погрешность в определении фазы при заданном β превосходит единицу, рассчитанная скорость распространения соответствующей гармонической волны оказывается больше точного значения скорости этой волны. Про такие волны говорят, что они распространяются с опережением по фазе. Аналогично, если относительная погрешность в определении фазы меньше единицы, то рассчитанная скорость распространения гармонической волны оказывается меньше точного значения скорости этой волны, поэтому говорят, что такая волна распространяется с отставанием по фазе. При использовании разностей против потока опережение по фазе возникает при $0.5 < v < 1$, а отставание — если $v < 0.5$.

Пример 4.1. Пусть для решения волнового уравнения ($c = 0.75$) с начальным условием

$$u(x, 0) = \sin(6\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

и периодическими граничными условиями используется схема с разностями против потока. Определим погрешность в определении амплитуды и фазы волны через десять шагов по времени, если $\Delta t = 0.02$ и $\Delta x = 0.02$.

Решение. В рассматриваемой задаче можно ограничиться одним значением параметра β , так как при заданных граничных и начальном условиях решение волнового уравнения описывается одним членом ряда Фурье. Коэффициент перехода в этом случае определяется также одним членом ряда Фурье, удовлетворяющим волновому уравнению, поэтому частота точного решения совпадает с частотой, используемой для определения коэффициента перехода, т. е. $f_m = k_m/2\pi$. Следовательно, в рассматриваемом случае волновое число задается в виде

$$k_m = \frac{m\pi}{L} = \frac{6\pi}{1} = 6\pi.$$

Теперь можно вычислить β :

$$\beta = k_m \Delta x = (6\pi)(0.02) = 0.12\pi.$$

При помощи числа Куранта

$$v = \frac{c \Delta t}{\Delta x} = \frac{(0.75)(0.02)}{(0.02)} = 0.75$$

легко определить модуль коэффициента перехода

$$|G| = [(1 - v + v \cos \beta)^2 + (-v \sin \beta)^2]^{1/2} = 0.986745$$

и, следовательно, погрешность в определении амплитуды после десяти шагов по времени

$$(1 - |G|^n) A_0 = (1 - |G|^{10}) (1) = 1 - 0.8751 = 0.1249.$$

Сравнивая фазовый угол ϕ после выполнения одного шага по времени

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{-v \sin \beta}{1 - v + v \cos \beta} = -0.28359$$

с его точным значением ϕ_e за один шаг

$$\phi_e = -\beta v = -0.28274,$$

получим, что после выполнения десяти шагов по времени ошибка в определении фазы будет равна

$$10(\phi_e - \phi) = 0.0084465.$$

Сопоставим теперь точное решение волнового уравнения при $t = 10\Delta t = 0.2$ с полученным численно после выполнения десяти шагов по времени. Точное решение имеет вид

$$u(x, 0.2) = \sin [6\pi(x - 0.15)],$$

а решение, полученное численно по схеме с разностями против потока, имеет на десятом шаге по времени вид

$$u(x, 0.2) = (0.8751) \sin [6\pi(x - 0.15) - 0.0084465].$$

Чтобы показать связь коэффициента перехода и модифицированного уравнения (4.15), запишем это уравнение в виде

$$u_t + cu_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{2n} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + C_{2n+1} \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} \right). \quad (4.20)$$

Здесь C_{2n} и C_{2n+1} — коэффициенты перед членами уравнения с производными четного и нечетного порядков по пространству. Уорминг и Хайетт показали, что необходимым условием устойчивости разностной схемы является условие

$$(-1)^{l-1} C_{2l} > 0, \quad (4.21)$$

где C_{2l} — коэффициент перед низшей производной четного порядка. Условие (4.21) аналогично требованию положительности коэффициента вязкости в уравнениях движения вязкой жидкости. В уравнении (4.15) коэффициент при низшей производной четного порядка имеет вид

$$C_2 = \frac{c \Delta x}{2} (1 - v), \quad (4.22)$$

поэтому необходимос условие устойчивости разностной схемы запишется в виде

$$(c \Delta x/2)(1 - v) > 0, \quad (4.23)$$

т. е. разностная схема устойчива, если $v < 1$. Это же условие устойчивости мы получили выше из анализа коэффициента перехода. Следует напомнить, что «эвристическая» теория устойчивости, приводящая к условию (4.21), позволяет получить лишь необходимое условие устойчивости, поэтому для некоторых конечно-разностных схем информация об их устойчивости будет недостаточно полной, а для некоторых разностных схем (используемых, например, для решения уравнения теплопроводности) необходимо привлекать более сложные методы анализа устойчивости.

Уорминг и Хайетт также показали, что относительная погрешность в определении фазы для разностных схем решения волнового уравнения определяется выражением

$$\frac{\phi}{\phi_e} = 1 - \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (k_m)^{2n} C_{2n+1}, \quad (4.24)$$

где $k_m = \beta/\Delta x$ — волновое число. Если волновое число мало, то можно ограничиться рассмотрением лишь членов ряда низшего порядка. Для схемы с разностями против потока это приводит к соотношению

$$\frac{\phi}{\phi_e} \approx 1 - \frac{1}{c} (-1) \left(\frac{\beta}{\Delta x} \right)^2 C_3 = 1 - \frac{1}{6} (2v^2 - 3v + 1) \beta^2, \quad (4.25)$$

которое совпадает с (4.19). Итак, мы показали, что между коэффициентом перехода и видом модифицированного уравнения существует непосредственная связь.

4.1.3. Схема Лакса

Разностную схему (4.6) (метод Эйлера) можно сделать устойчивой, заменив u_j^n на пространственное среднее $(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2$. В результате получим широко известную схему Лакса [Lax, 1954], которой мы уже пользовались:

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x} = 0. \quad (4.26)$$

Это явная одношаговая схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2/\Delta t)$. Она устойчива при

$|v| \leq 1$. Модифицированное уравнение имеет вид

$$u_t + cu_x = \frac{c \Delta x}{2} \left(\frac{1}{v} - v \right) u_{xx} + \frac{c (\Delta x)^2}{3} (1 - v^2) u_{xxx} + \dots \quad (4.27)$$

Отметим, что эта схема не всегда удовлетворяет условию согласованности, так как отношение $(\Delta x)^2/\Delta t$ может не стремиться к нулю при $\Delta t, \Delta x$, стремящихся к нулю. Однако если при стремлении Δt и Δx к нулю число Куранта v сохраняется постоянным, то условие согласованности выполняется. Схема Лакса отличается высоким уровнем диссипации при $v \neq 1$. В этом можно убедиться, сравнив коэффициент при члене u_{xx} в уравнении (4.27)

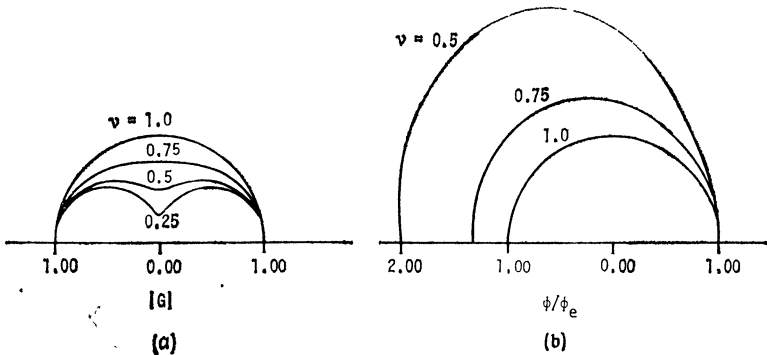


Рис. 4.4. Схема Лакса. (а) Модуль коэффициента перехода; (б) относительная погрешность определения фазы.

и в модифицированном уравнении (4.10) для схемы с разностями против потока при разных v . На высокий уровень диссипации указывают и значения коэффициента перехода

$$G = \cos \beta - iv \sin \beta, \quad (4.28)$$

который был вычислен в п. 3.6.1. Модуль коэффициента перехода показан на рис. 4.4 (а). Относительная погрешность в определении фазы выражается в виде

$$\frac{\phi}{\phi_e} = \frac{\text{arctg}(-v \text{tg} \beta)}{-\beta v},$$

при этом происходит опережение по фазе, что видно из рис. 4.4 (б).

4.1.4. Неявный метод Эйлера

До сих пор мы рассматривали только явные методы. Рассмотрим неявную разностную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2 \Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = 0. \quad (4.29)$$

Это схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$. Анализ устойчивости Неймана (анализ Фурье) показывает, что она устойчива при любом шаге по времени, т. е. абсолютно устойчива. Однако при использовании этой схемы на каждом шаге по времени приходится решать систему алгебраических уравнений. Чтобы проиллюстрировать это, перепишем уравнение (4.29) так, что члены, содержащие значения

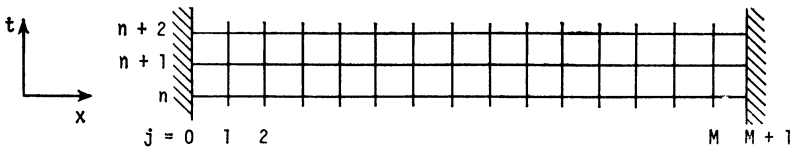


Рис. 4.5. Расчетная сетка.

неизвестных на $(n + 1)$ -м шаге по времени, будут в левой части, а известное значение u_j^n — в правой части уравнения. В результате получим

$$\frac{\nu}{2} u_{j+1}^{n+1} + (1) u_j^{n+1} - \frac{\nu}{2} u_{j-1}^{n+1} = u_j^n, \quad (4.30)$$

или

$$a u_{j+1}^{n+1} + d u_j^{n+1} + b u_{j-1}^{n+1} = C, \quad (4.31)$$

где $a = \nu/2$, $d = 1$, $b = -\nu/2$, $C = u_j^n$. Пусть расчет проводится на изображенной на рис. 4.5 сетке, состоящей из $M + 2$ узлов по x . Начальные условия заданы при $n = 0$. На левой границе величина u_0^{n+1} задана и равна u_0 , а значение u_{M+1}^{n+1} на правой границе можно вычислить в процессе решения методом характеристик. Например, если $\nu = 1$, то $u_{M+1}^{n+1} = u_M^n$. На заданной сетке разностная схема (4.31) сводится к решению системы M линейных алгебраических уравнений на $(n + 1)$ -м шаге по времени:

$$\begin{matrix}
 & [A] & & [u] & & [C] \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 d_1 & a_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 b_2 & d_2 & a_2 & & & & & \cdot \\
 0 & b_3 & d_3 & a_3 & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & 0 \\
 \cdot & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & u_{M-1}^{n+1} \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_M & d_M
 \end{array} \right] & \cdot & \left[\begin{array}{c}
 u_1^{n+1} \\
 u_2^{n+1} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 u_{M-1}^{n+1} \\
 u_M^{n+1}
 \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c}
 C_1 \\
 C_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 C_{M-1} \\
 C_M
 \end{array} \right] \cdot \quad (4.32)
 \end{matrix}$$

В системе уравнений (4.32) коэффициенты C_1 и C_M определяются соотношениями

$$\begin{aligned} C_1 &= u_1^n - bu_0^{n+1}, \\ C_M &= u_M^n - au_{M+1}^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где u_0^{n+1} и u_{M+1}^{n+1} известны из граничных условий.

В уравнении (4.32) матрица $[A]$ трехдиагональная. Томас [Thomas, 1949] предложил метод быстрого решения систем уравнений с трехдиагональной матрицей, который обычно называют *прогонкой*. При применении этого алгоритма система уравнений сначала приводится к системе уравнений с верхней треугольной матрицей заменой диагональных элементов d_i элементами

$$d_i - \frac{b_i}{d_{i-1}} a_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, M,$$

и коэффициентов C_i коэффициентами

$$C_i - \frac{b_i}{d_{i-1}} C_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, M.$$

После этого вычисление неизвестных начинается от значения u на границе $u_M^{n+1} = C_M/d_M$ и продолжается по рекуррентной формуле

$$u_j^{n+1} = \frac{C_j - a_j u_{j+1}^{n+1}}{d_j}, \quad j = M-1, M-2, \dots, 1.$$

Более подробно метод прогонки будет описан в п. 4.3.3.

При использовании неявных схем на каждом шаге по времени приходится проводить больше вычислений, чем при использовании явных схем, но зато можно проводить расчет с существенно большим шагом по времени, так как они безусловно устойчивы. Однако при использовании слишком большого шага по времени можно получить бессмысленные результаты. Это связано с тем, что при увеличении шага по времени растет погрешность аппроксимации. Модифицированное уравнение для неявного метода Эйлера имеет вид

$$u_t + cu_x = (1/2c^2 \Delta t) u_{xx} - [1/6c (\Delta x)^2 + 1/3c^3 (\Delta t)^2] u_{xxx} + \dots \quad (4.34)$$

и, следовательно, не удовлетворяет условию сдвига. Коэффициент перехода

$$G = \frac{1 - iv \sin \beta}{1 + v^2 \sin^2 \beta} \quad (4.35)$$

и относительная погрешность в определении фазы

$$\frac{\phi}{\phi_e} = \frac{\arcsin(-\nu \sin \beta)}{-\beta \nu} \quad (4.36)$$

построены на рис. 4.6. Неявный метод Эйлера ведет к сильной

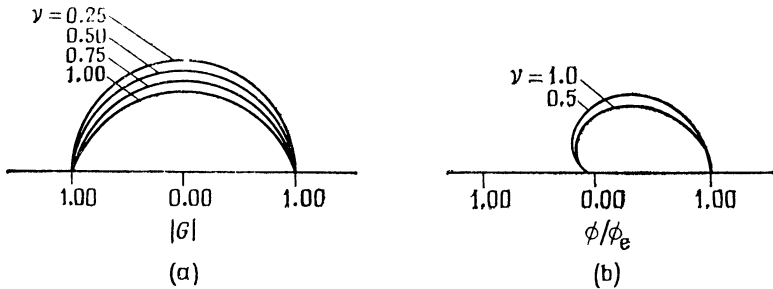


Рис. 4.6. Неявный метод Эйлера. (а) Модуль коэффициента перехода; (б) относительная погрешность определения фазы.

диссипации при средних волновых числах и значительному запаздыванию по фазе при больших волновых числах.

4.1.5. Метод с перешагиванием (метод «чехарда»)

До сих пор мы в этой главе рассматривали лишь схемы первого порядка точности решения линейного волнового уравнения. В большинстве случаев эти схемы не используются для решения уравнений в частных производных из-за их низкой точности. Простейшим методом второго порядка точности является *метод с перешагиванием*. Применяя его к волновому уравнению первого порядка, получаем явную одношаговую трехслойную по времени разностную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (4.37)$$

Метод с перешагиванием называют *трехслойным по времени*, так как для определения значения u на $(n + 1)$ -м шаге по времени необходимо знать значения u на $(n - 1)$ -м и n -м шагах по времени. Метод имеет погрешность аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$ и устойчив при $|\nu| \leq 1$. Модифицированное уравнение имеет вид

$$u_t + cu_x = \frac{c(\Delta x)^2}{6}(\nu^2 - 1)u_{xxx} - \frac{c(\Delta x)^4}{120}(9\nu^4 - 10\nu^2 + 1)u_{xxxx} + \dots \quad (4.38)$$

Главный член в выражении для погрешности аппроксимации пропорционален производной нечетного порядка u_{xxx} , поэтому разностная схема должна обладать в основном дисперсионными свойствами. Последнее вообще характерно для схем второго порядка точности. Схему с перешагиванием отличает то, что в правой части модифицированного уравнения вообще нет производных четного порядка, поэтому связанные с диссипацией ошибки вообще отсутствуют. Следовательно, метод с перешагиванием нейтрально устойчив и любые появляющиеся при расчете ошибки, например ошибки от неточного задания граничных условий

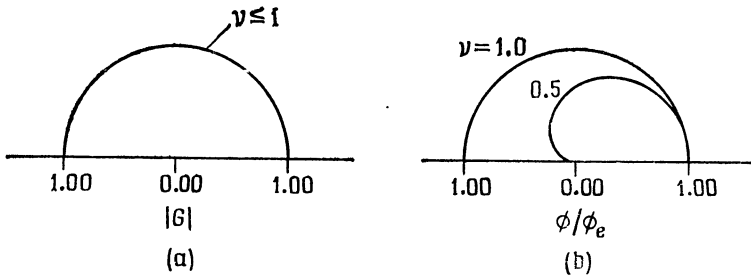


Рис. 4.7. Схема «чехарда». (а) Модуль коэффициента перехода; (б) относительная погрешность определения фазы.

или от округления, не затухают (предполагается, что граничные условия периодические, а $|\nu| \leq 1$). Коэффициент перехода

$$G = \pm (1 - \nu^2 \sin^2 \beta)^{1/2} - i\nu \sin \beta \quad (4.39)$$

и относительная погрешность в определении фазы

$$\frac{\phi}{\phi_e} = \frac{\arctg [-\nu \sin \beta / \pm (1 - \nu^2 \sin^2 \beta)^{1/2}]}{-\beta \nu} \quad (4.40)$$

построены на рис. 4.7.

Хотя метод с перешагиванием имеет второй порядок точности и не вносит в решение диссипацию, он обладает рядом недостатков. Прежде всего начальные условия необходимо задать на двух временных слоях. С этой проблемой можно справиться, используя двухслойную схему на первом шаге по времени. Второй недостаток метода связан именно с «перешагиванием» (т. е. с тем, что u_j^{n+1} не зависит от u_j^n), которое приводит к появлению при расчете двух независимых решений. И наконец, метод с перешагиванием предъявляет более высокие требования к памяти ЭВМ, так как является трехслойным по времени. Необходимую для расчета память ЭВМ можно существенно сократить, если вместо величины u_j^{n-1} записать величину u_j^{n+1} .

4.1.6. Метод Лакса — Вендроффа

Схему Лакса — Вендроффа [Lax, Wendroff, 1960] можно построить, исходя из разложения в ряд Тейлора:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t u_t + 1/2 (\Delta t)^2 u_{tt} + O((\Delta t)^3). \quad (4.41)$$

Из волнового уравнения следует

$$u_t = -cu_x, \quad u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (4.42)$$

Перепишем уравнение (4.41) в виде

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \Delta t u_x + 1/2 c^2 (\Delta t)^2 u_{xx} + O((\Delta t)^3) \quad (4.43)$$

и заменим производные u_x и u_{xx} , используя центральные разности второго порядка. В результате получим широко известную схему Лакса — Вендроффа

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c \Delta t}{2 \Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c^2 (\Delta t)^2}{2 (\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (4.44)$$

Это явная одношаговая схема второго порядка точности с по-

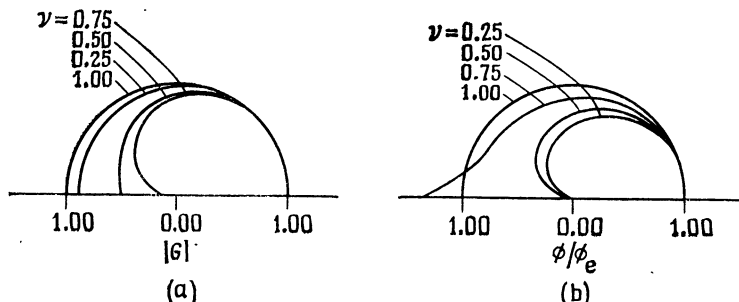


Рис. 4.8. Схема Лакса — Вендроффа. (а) Модуль коэффициента перехода; (б) относительная погрешность определения фазы.

грешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2)$, устойчивая при $|v| \leq 1$. Модифицированное уравнение в этом случае имеет вид

$$u_t + cu_x = -c \frac{(\Delta x)^2}{6} (1 - v^2) u_{xxx} - \frac{c (\Delta x)^3}{8} v (1 - v^2) u_{xxx} + \dots \quad (4.45)$$

Коэффициент перехода

$$G = 1 - v^2 (1 - \cos \beta) - iv \sin \beta \quad (4.46)$$

и относительная погрешность в определении фазы

$$\frac{\phi}{\phi_e} = \frac{\arctg \{-v \sin \beta / [1 - v^2 (1 - \cos \beta)]\}}{-\beta v} \quad (4.47)$$

изображены на рис. 4.8. Для схемы Лакса — Вендроффа характерно запаздывание по фазе, исключение составляют лишь гармоники с большими волновыми числами при $\sqrt{0.5} < v < 1$.

4.1.7. Двухшаговый метод Лакса — Вендроффа

Для решения нелинейных уравнений, например уравнений, описывающих движение невязкой жидкости, можно использовать двухшаговый вариант метода Лакса — Вендроффа. Применяя этот метод для решения волнового уравнения, получаем явную двухшаговую трехслойную по времени разностную схему:

Шаг 1

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - (u_{j+1}^n + u_j^n)/2}{\Delta t/2} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0. \quad (4.48)$$

Шаг 2

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0. \quad (4.49)$$

Эта схема имеет второй порядок точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2)$ и устойчива при $|v| \leq 1$. Шаг 1 — это просто метод Лакса, использованный для построения разностного уравнения в точке $j + 1/2$ на полушаге по времени, а шаг 2 — метод с перешагиванием, примененный на оставшемся полушаге по времени. В случае линейного волнового уравнения первого порядка двухшаговый метод Лакса — Вендроффа эквивалентен описанному в предыдущем разделе методу Лакса — Вендроффа. В этом легко убедиться при помощи подстановки (4.48) в (4.49). Так как оба метода эквивалентны, то и модифицированное уравнение, и коэффициент перехода у них будут одинаковы.

4.1.8. Метод Мак-Кормака

Метод Мак-Кормака [MacCormack, 1969] широко применяется для решения уравнений газовой динамики. Фактически это один из вариантов двухшагового метода Лакса — Вендроффа, не требующий вычисления значений искомой функции в точках $j + 1/2$ и $j - 1/2$. Благодаря этому метод Мак-Кормака особенно удобен для решения нелинейных уравнений в частных производных, как это будет показано в п. 4.4.3. Применяя явный метод предиктор-корректор к линейному волновому уравнению, получаем следующую разностную схему:

Предиктор

$$\overline{u}_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n). \quad (4.50)$$

Корректор

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[u_j^n + \overline{u_j^{n+1}} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\overline{u_j^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}}) \right]. \quad (4.51)$$

Первоначально (предиктор) находится оценка $\overline{u_j^{n+1}}$ величины u на $(n+1)$ -м шаге по времени, а потом (корректор) определяется окончательное значение u на $(n+1)$ -м шаге по времени. Отметим, что в предикторе производная $\partial u / \partial x$ аппроксимируется разностями вперед, а в корректоре — разностями назад. Можно поступить и наоборот, что бывает полезным при решении некоторых задач. К таким задачам относятся, в частности, задачи с движущимися разрывами. Для линейного волнового уравнения схема Мак-Кормака эквивалентна схеме Лакса — Вендроффа, поэтому у них одинаковые погрешность аппроксимации, условие устойчивости, модифицированное уравнение и коэффициент перехода.

4.1.9. Разности против потока

Бим и Уорминг [Warming, Beam, 1975] предложили несколько изменить метод Мак-Кормака, используя как на шаге предиктор, так и на шаге корректор разности назад (разности против потока). При $c > 0$ этот метод приводит к разностной схеме.

Предиктор

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n). \quad (4.52)$$

Корректор

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[u_j^n + \overline{u_j^{n+1}} - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (\overline{u_j^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}}) - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) \right]. \quad (4.53)$$

Благодаря тому что в правую часть уравнения (4.53) включена односторонняя с разностями против потока аппроксимация второй производной, схема имеет второй порядок точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta t)(\Delta x), (\Delta x)^2)$. Если подставить (4.52) в (4.53), то получится одношаговый алгоритм

$$u_j^{n+1} = u_j^n - v(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} v(v-1)(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n). \quad (4.54)$$

Модифицированное уравнение для рассматриваемой разностной схемы имеет вид

$$u_t + cu_x = \frac{c(\Delta x)^2}{6} (1 - \nu)(2 - \nu) u_{xxx} - \frac{(\Delta x)^4}{8 \Delta t} \nu(1 - \nu)^2(2 - \nu) u_{xxxx} + \dots \quad (4.55)$$

При $\nu = 1$ и $\nu = 2$ схема с разностями против потока имеет бесконечный порядок точности. Коэффициент перехода выражается в виде

$$G = 1 - 2\nu \left[\nu + 2(1 - \nu) \sin^2 \frac{\beta}{2} \right] \sin^2 \frac{\beta}{2} - i\nu \sin \beta \left[1 + 2(1 - \nu) \sin^2 \frac{\beta}{2} \right], \quad (4.56)$$

и разностная схема устойчива при $0 \leq \nu \leq 2$. Модуль коэффициента перехода и относительная погрешность в определении фазы показаны на рис. 4.9. Для метода с разностями против

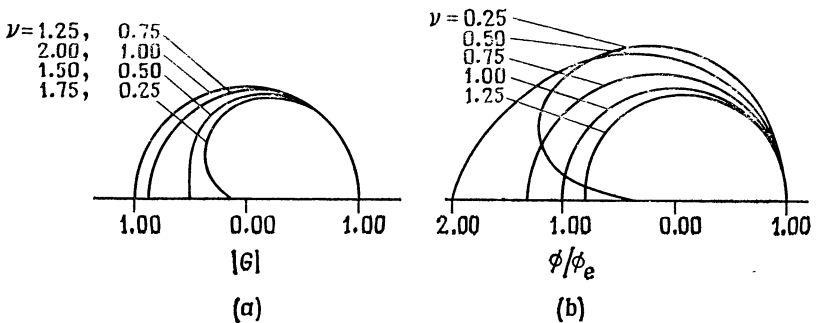


Рис. 4.9. Схема с разностями против потока (Бима—Уорминга). (а) Модуль коэффициента перехода; (б) относительная погрешность определения фазы.

потока при $0 < \nu < 1$ характерно в основном опережение по фазе, а при $1 < \nu < 2$ — отставание. Отметим, что при $0 < \nu < 1$ метод Лакса—Вендроффа и метод Бима и Уорминга с разностями против потока имеют противоположные ошибки по фазе, поэтому дисперсионную ошибку можно существенно уменьшить, применив линейную комбинацию двух этих методов. Метод Фромма [Fromm, 1968] с равной нулю средней ошибкой по фазе основан именно на этой идее.

4.1.10. Центрированная по времени неявная схема

Для построения неявной разностной схемы второго порядка точности вычтем два ряда Тейлора

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t (u_t)_j^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} (u_{tt})_j^n + \frac{(\Delta t)^3}{6} (u_{ttt})_j^n + \dots, \\ u_j^n &= u_j^{n+1} - \Delta t (u_t)_j^{n+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} (u_{tt})_j^{n+1} - \frac{(\Delta t)^3}{6} (u_{ttt})_j^{n+1} + \dots \end{aligned} \quad (4.57)$$

и заменим $(u_{tt})_j^{n+1}$ на

$$(u_{tt})_j^{n+1} = (u_{tt})_j^n + \Delta t (u_{ttt})_j^n + \dots$$

В результате получим

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} [(u_t)_j^n + (u_t)_j^{n+1}] + O((\Delta t)^3). \quad (4.58)$$

Такое выражение для производной по времени называют конечно-разностной аппроксимацией производной по Кранку—Николсону. В случае линейного волнового уравнения $u_t = -cu_x$ имеем

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c \Delta t}{2} [(u_x)_j^n + (u_x)_j^{n+1}] + O((\Delta t)^3). \quad (4.59)$$

Подставляя вместо членов с производной u_x центрально-разностную аппроксимацию второго порядка точности, получаем

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c \Delta t}{4} (u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n). \quad (4.60)$$

Это схема второго порядка точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2)$. Она безусловно устойчива при любых шагах по времени, однако на каждом новом временном шаге приходится решать линейную систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Модифицированное уравнение для рассматриваемой разностной схемы имеет вид

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= - \left[\frac{c^3 (\Delta t)^2}{12} + \frac{c (\Delta x)^2}{6} \right] u_{xxx} - \\ &- \left[\frac{c (\Delta x)^4}{120} + \frac{c^3 (\Delta t)^2 (\Delta x)^2}{24} + \frac{c^4 (\Delta t)^4}{80} \right] u_{xxxx} + \dots \end{aligned} \quad (4.61)$$

Отметим, что в модифицированное уравнение не входят производные четного порядка, т. е. неявная искусственная вязкость равна нулю. Когда такая схема применяется для решения нелинейных уравнений движения, для предотвращения нелинейной неустойчивости часто необходимо вводить в нее некоторую явную искусственную вязкость, т. е. «сглаживающий» член. Под-

рбно этот вопрос будет рассмотрен в п. 4.4.7. Модуль коэффициента перехода

$$G = \frac{1 - (iv/2) \sin \beta}{1 + (iv/2) \sin \beta} \quad (4.62)$$

и относительная погрешность в определении фазы показаны на рис. 4.10.

Для центрированной по времени неявной разностной схемы можно достичь четвертого порядка аппроксимации по простран-

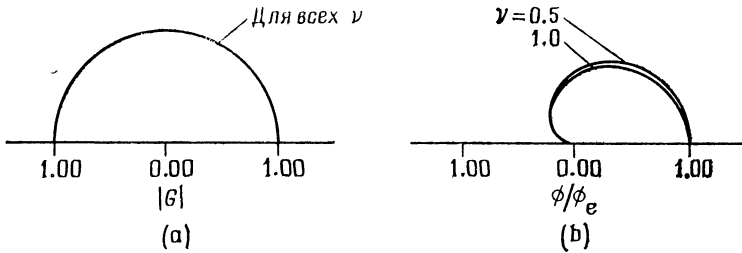


Рис. 4.10. Центрированная по времени неявная схема. (а) Модуль коэффициента перехода; (б) относительная погрешность в определении фазы.

ству, если для конечно-разностной аппроксимации производной u_x использовать соотношение (3.31):

$$(u_x)_j = \frac{1}{2 \Delta x} \frac{\bar{\delta}_x}{1 + \delta_x^2/6} u_j + O((\Delta x)^4). \quad (4.63)$$

Модифицированное уравнение и погрешность в определении фазы для получающейся в этом случае схемы можно найти в работе [Beam, Warming, 1976].

4.1.11. Метод Русанова (Бёрстейна — Мирина)

До сих пор мы рассматривали лишь методы первого или второго порядка точности. В литературе опубликовано только несколько методов третьего порядка точности. В. В. Русанов [1968] и Бёрстейн и Мирин [Burstein, Mirin, 1970] одновременно создали следующий явный трехшаговый метод:

Шаг 1

$$u_{j+1/2}^{(1)} = 1/2 (u_{j+1}^n + u_j^n) - 1/3 \nu (u_{j+1}^n - u_j^n).$$

Шаг 2

$$u_j^{(2)} = u_j^n - 2/3 \nu (u_{j+1/2}^{(1)} - u_{j-1/2}^{(1)}).$$

Шаг 3

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{24} v (-2u_{j+2}^n + 7u_{j+1}^n - 7u_{j-1}^n + 2u_{j-2}^n) - \\ - \frac{3}{8} v (u_{j+1}^{(2)} - u_{j-1}^{(2)}) - \frac{\omega}{24} (u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n). \quad (4.64)$$

На шаге 3 в уравнение добавлен член, пропорциональный разностному оператору четвертого порядка:

$$\delta_x^4 u_j^n = u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n,$$

умноженному на некоторый параметр ω . Этот член вводится в уравнение для обеспечения устойчивости схемы. Необходимость добавления этого члена очевидна из условия устойчивости рассматриваемой разностной схемы:

$$|v| \leq 1, \quad 4v^2 - v^4 \leq \omega \leq 3. \quad (4.65)$$

Если разностный оператор четвертого порядка в уравнение не введен (т. е. ω равно нулю), то при $0 < v \leq 1$ не удастся удовлетворить условию устойчивости (4.65). Модифицированное уравнение для схемы Рунсона имеет вид

$$u_t + cu_x = - \frac{c(\Delta x)^3}{24} \left(\frac{\omega}{v} - 4v + v^3 \right) u_{xxxx} + \\ + \frac{c(\Delta x)^4}{120} (-5\omega + 4 + 15v^2 - 4v^4) u_{xxxxx} + \dots \quad (4.66)$$

Для снижения диссипативных свойств схемы можно приравнять нулю коэффициент при четвертой производной, полагая

$$\omega = 4v^2 - v^4. \quad (4.67)$$

Аналогично можно уменьшить дисперсионные свойства разностной схемы, приравняв нулю коэффициент при пятой производной, т. е.

$$\omega = \frac{(4v^2 + 1)(4 - v^2)}{5}. \quad (4.68)$$

Коэффициент перехода для метода Рунсона имеет вид

$$G = 1 - \frac{v^2}{2} \sin^2 \beta - \frac{2\omega}{3} \sin^4 \frac{\beta}{2} - iv \sin \beta \left[1 + \frac{2}{3} (1 - v^2) \sin^2 \frac{\beta}{2} \right]. \quad (4.69)$$

Модуль коэффициента перехода и относительная погрешность в определении фазы приведены на рис. 4.11. Из рисунка видно,

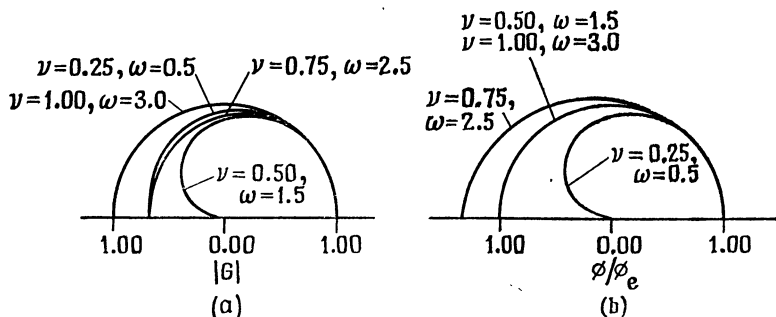


Рис. 4.11. Схема Русанова. (а) Модуль коэффициента перехода; (б) относительная погрешность определения фазы.

что при использовании метода Русанова опережение или запаздывание по фазе определяется величиной параметра ω .

4.1.12. Метод Уорминга — Катлера — Ломакса

Уорминг и др. [Warming et al., 1973] предложили метод третьего порядка точности, который на первых двух шагах по времени совпадает с методом Мак-Кормака и на третьем — с методом Русанова:

Шаг 1

$$u_j^{(1)} = u_j^n - \frac{2}{3} \nu (u_{j+1}^n - u_j^n).$$

Шаг 2

$$u_j^{(2)} = \frac{1}{2} [u_j^n + u_j^{(1)} - \frac{2}{3} \nu (u_j^{(1)} - u_{j-1}^{(1)})].$$

Шаг 3

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{24} \nu (-2u_{j+2}^n + 7u_{j+1}^n - 7u_{j-1}^n + 2u_{j-2}^n) - \frac{3}{8} \nu (u_{j+1}^{(2)} - u_{j-1}^{(2)}) - \frac{\omega}{24} (u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n). \quad (4.70)$$

Условия устойчивости рассматриваемого метода такие же, как и метода Русанова. Кроме того, в случае волнового уравнения первого порядка и модифицированное уравнение совпадает с (4.66). Метод Уорминга — Катлера — Ломакса обладает перед методом Русанова теми же преимуществами, что и метод Мак-Кормака перед двухшаговым методом Лакса — Вендроффа.

При использовании методов третьего порядка точности за увеличение точности алгоритма приходится расплачиваться увеличением времени счета и усложнением разностной схемы. Это необходимо тщательно учитывать при выборе метода решения уравнения в частных производных. Обычно для большинства приложений достаточную точность позволяют получить методы второго порядка точности.

При решении одномерного линейного волнового уравнения первого порядка явные методы второго порядка точности, например методы Лакса—Вендроффа или Бима—Уорминга, дают прекрасные результаты с минимальными вычислительными усилиями. Неявные методы для решения этого уравнения использовать нецелесообразно, так как решение нестационарно, и нас обычно интересуют значения величин через небольшие промежутки времени.

§ 4.2. Уравнение теплопроводности

Одномерное уравнение теплопроводности (уравнение диффузии)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.71)$$

является параболическим уравнением в частных производных. Оно описывает одномерный процесс распространения тепла или одномерную диффузию в однородной изотропной среде. Это уравнение является простейшим модельным уравнением для параболических уравнений. Точное решение уравнения теплопроводности с начальным условием $u(x, 0) = f(x)$ и граничными условиями $u(0, t) = u(1, t) = 0$ имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha k^2 t} \sin(kx), \quad (4.72)$$

где

$$A_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(kx) dx, \quad k = n\pi.$$

Перейдем теперь к изучению некоторых наиболее важных разностных схем решения уравнения теплопроводности.

4.2.1. Простой явный метод

Явный одношаговый метод

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (4.73)$$

имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации

$O(\Delta t, (\Delta x)^2)$. В стационарном случае погрешность аппроксимации равна $O((\Delta x)^2)$. Как показано выше, такая разностная схема устойчива при

$$0 \leq r \leq 1/2, \tag{4.74}$$

где

$$r = \alpha \Delta t / (\Delta x)^2. \tag{4.75}$$

Модифицированное уравнение в рассматриваемом случае имеет вид

$$u_t - \alpha u_{xx} = \left[-\frac{1}{2} \alpha^2 \Delta t + \frac{\alpha (\Delta x)^2}{12} \right] u_{xxxx} + \\ + \left[\frac{1}{3} \alpha^3 (\Delta t)^2 - \frac{1}{12} \alpha^2 \Delta t (\Delta x)^2 + \frac{1}{360} \alpha (\Delta x)^4 \right] u_{xxxxxx} + \dots \tag{4.76}$$

Отметим, что при $r = 1/6$ погрешность аппроксимации равна $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^4)$. Интересно также заметить, что в выражение

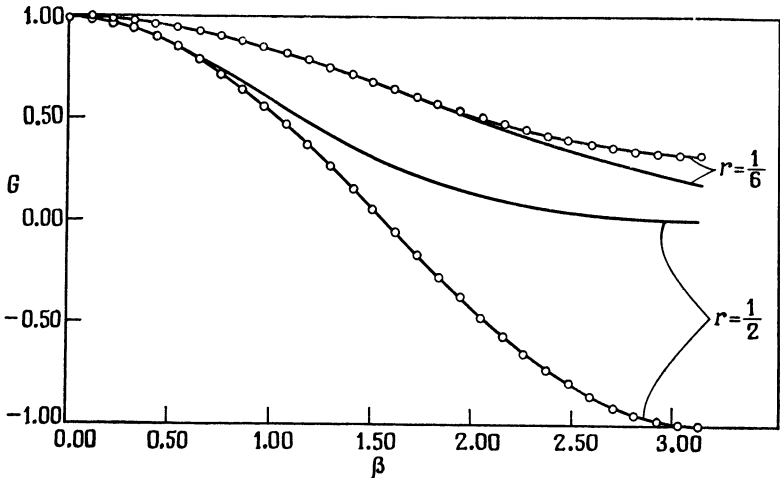


Рис. 4.12. Коэффициент перехода для простой явной схемы. —○— простой явный метод; — точное решение.

для погрешности аппроксимации не входят производные нечетного порядка. Поэтому для этого метода, так же как для большинства других методов решения уравнения теплопроводности, дисперсия на разностной сетке отсутствует. Этот факт следует и из анализа выражения для коэффициента перехода рассматриваемой схемы:

$$G = 1 + 2r (\cos \beta - 1), \tag{4.77}$$

причем мнимая часть этого коэффициента перехода равна нулю и, следовательно, сдвиг по фазе отсутствует. На рис. 4.12 про-

ведено сравнение коэффициента перехода (4.77) с его точным значением при двух различных r . Точное значение коэффициента перехода (затухания) определялось путем подстановки фундаментального решения

$$u = e^{-\frac{\alpha k^2 t}{m}} e^{ik_m x}$$

в соотношение

$$G_e = \frac{u(t + \Delta t)}{u(t)}$$

Отсюда

$$G_e = e^{-\frac{\alpha k_m^2 \Delta t}{m}}, \tag{4.78}$$

или

$$G_e = e^{-r\beta^2}, \text{ где } \beta = k_m \Delta x. \tag{4.79}$$

Следовательно, амплитуда точного решения уравнения теплопроводности уменьшается на каждом шаге по времени в $e^{-r\beta^2}$ раз (если не учитывать влияние граничных условий).

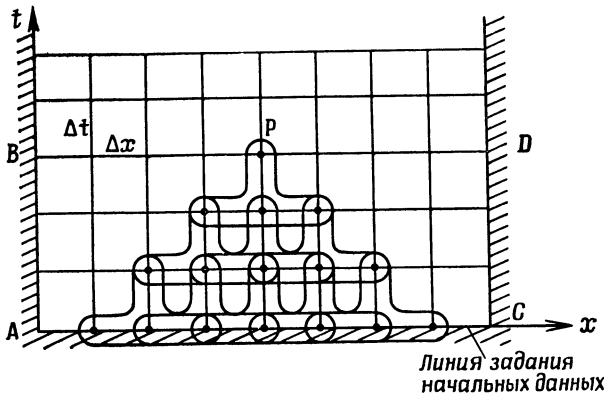


Рис. 4.13. Зона зависимости для простой явной схемы.

Из рис. 4.12 видно, что простой явный метод решения уравнения теплопроводности при $r = 1/2$ характеризуется сильной диссипацией при больших значениях параметра β . Как и следовало ожидать, при $r = 1/6$ наблюдается гораздо лучшее совпадение коэффициента перехода с его точным значением.

При использовании простого явного метода уравнение теплопроводности решается последовательным продвижением (маршем) от линии, на которой заданы начальные данные, т. е. так же, как решались явными методами гиперболические уравнения. Этот процесс проиллюстрирован на рис. 4.13. Из рисунка

видно, что решение в точке P не зависит от граничных условий, заданных на линиях AB и CD . Однако решение уравнения теплопроводности в точке P должно зависеть от граничных условий на линиях AB и CD , так как характеристики параболического уравнения теплопроводности имеют вид $t = \text{const}$. Следовательно, простая явная схема (с конечным Δt) неправильно моделирует физические особенности уравнений в частных производных параболического типа. Представляется, что для решения уравнений в частных производных параболического типа лучше использовать неявные методы, так как они учитывают всю информацию, известную на характеристике $t = \text{const}$ и под ней. С другой стороны явные схемы лучше использовать для решения гиперболических уравнений, так как у них размер зоны зависимости ограничен.

Пример 4.2. Применим простой явный метод для решения уравнения теплопроводности ($\alpha = 0.05$) с начальным условием

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

и периодическими граничными условиями. Определим погрешность в определении амплитуды после десяти шагов по времени при $\Delta t = 0.1$, $\Delta x = 0.1$.

Решение. Единственное значение β удается определить в рассматриваемой задаче на основе тех же соображений, которые приведены в примере 4.1. Это значение параметра β равно

$$\beta = k_m \Delta x = (2\pi)(0.1) = 0.2\pi.$$

Вычисляя r по формуле

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{(0.05)(0.1)}{(0.1)^2} = 0.5,$$

находим коэффициент перехода для простого явного метода:

$$G = 1 + 2r(\cos \beta - 1) = 0.809017.$$

Точное значение коэффициента перехода равно

$$G_e = e^{-r\beta^2} = 0.820869,$$

поэтому погрешность в определении амплитуды равна

$$A_0 |G_e^{10} - G^{10}| = (1)(0.1389 - 0.1201) = 0.0188.$$

В соответствии с (4.72) точное решение уравнения теплопроводности после выполнения десяти шагов по времени ($t = 1.0$) имеет вид

$$u(x, 1) = e^{-\alpha 4\pi^2} \sin(2\pi x) = 0.1389 \sin(2\pi x).$$

Его можно сравнить с численным решением, имеющим вид

$$u(x, 1) = 0.1201 \sin(2\pi x).$$

4.2.2. Метод Ричардсона

Ричардсон [Richardson, 1910] предложил явную одношаговую трехслойную схему решения уравнения теплопроводности

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2 \Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (4.80)$$

Это схема второго порядка точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$. К сожалению, метод Ричардсона абсолютно неустойчив и, следовательно, для решения уравнения теплопроводности непригоден. Он приведен в книге просто как пример из истории численных методов решения уравнений в частных производных.

4.2.3. Простой неявный метод

Простой неявный метод предложен Лаасоненом [Laasonen, 1949]. Соответствующая разностная схема записывается в виде

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}. \quad (4.81)$$

Используя центральный разностный оператор

$$\delta_x^2 u_j^n = u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n,$$

уравнение (4.81) можно переписать более компактно:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta_x^2 u_j^{n+1}}{(\Delta x)^2}. \quad (4.82)$$

Рассматриваемая разностная схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$ и абсолютно устойчива. Как следует из уравнения (4.82), на $(n+1)$ -м шаге по времени следует решать систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей.

Модифицированное уравнение для рассматриваемой схемы имеет вид

$$u_t - \alpha u_{xx} = \left[\frac{1}{2} \alpha^2 \Delta t + \frac{\alpha (\Delta x)^2}{12} \right] u_{xxxx} + \left[\frac{1}{3} \alpha^3 (\Delta t)^2 + \frac{1}{12} \alpha^2 \Delta t (\Delta x)^2 + \frac{1}{360} \alpha (\Delta x)^4 \right] u_{xxxxxx} + \dots \quad (4.83)$$

Коэффициент перехода

$$G = [1 + 2r(1 - \cos \beta)]^{-1} \quad (4.84)$$

приведен на рис. 4.14 при $r = 1/2$ и сравнивается с его точным значением.

4.2.4. Метод Кранка — Николсона

Кранк и Николсон [Crank, Nicolson, 1947] предложили для решения уравнения теплопроводности неявную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta_x^2 u_j^n + \delta_x^2 u_j^{n+1}}{2(\Delta x)^2}. \quad (4.85)$$

Это широко известная абсолютно устойчивая схема, которую обычно называют *схемой Кранка — Николсона*. Благодаря тому

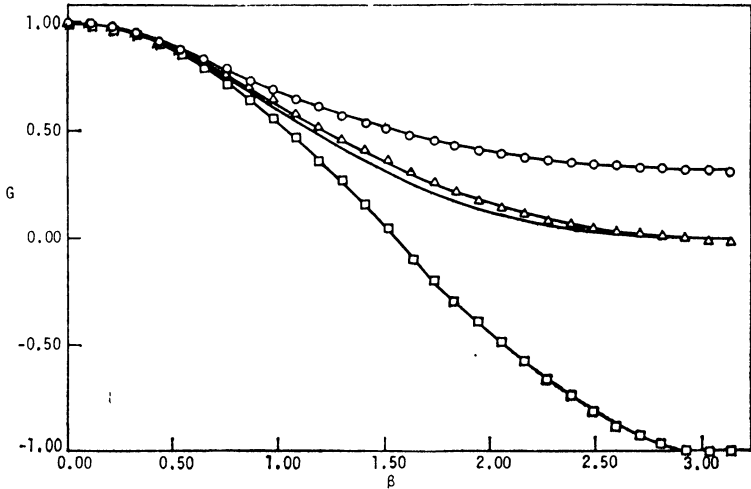


Рис. 4.14. Коэффициент перехода для нескольких численных схем, $r = 1/2$; —○— простая неявная схема; —△— схема Кранка — Николсона; —□— схема Дюфорта — Франкела; — точное решение.

что правая часть уравнения аппроксимируется полусуммой значений производных на двух последовательных шагах по времени, схема имеет второй порядок точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$. Как и в предыдущем случае, на $(n+1)$ -м слое по времени приходится решать систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. При применении метода Кранка — Николсона модифицированное уравнение имеет вид

$$u_t - \alpha u_{xx} = \frac{\alpha (\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \left[\frac{1}{12} \alpha^3 (\Delta t)^2 + \frac{1}{360} \alpha (\Delta x)^4 \right] u_{xxxxxx} + \dots \quad (4.86)$$

Коэффициент перехода

$$G = \frac{1 - r(1 - \cos \beta)}{1 + r(1 - \cos \beta)} \quad (4.87)$$

при $r = 1/2$ построен на рис. 4.14.

4.2.5. Комбинированный метод А

Простой явный метод, простой неявный метод и метод Кранка — Николсона являются частными случаями более общего метода

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\theta \delta_x^2 u_j^{n+1} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^n}{(\Delta x)^2}, \quad (4.88)$$

где $\theta = \text{const} (0 \leq \theta \leq 1)$. При $\theta = 0$ получаем простой явный метод, при $\theta = 1$ — простой неявный метод, а при $\theta = 1/2$ — метод Кранка — Николсона. Этот комбинированный метод имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$, за исключением трех частных случаев:

- (а) $\theta = 1/2$. Схема Кранка — Николсона, погрешность аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$.
- (б) $\theta = \frac{1}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{12\alpha \Delta t}$, погрешность аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^4)$.
- (с) $\theta = \frac{1}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{12\alpha \Delta t}$ и $\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t} = \sqrt{20}$, погрешность аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^6)$.

Погрешности аппроксимации в этих частных случаях определяются из модифицированного уравнения

$$u_t - \alpha u_{xx} = \left[\left(\theta - \frac{1}{2} \right) \alpha^2 \Delta t + \frac{\alpha (\Delta x)^2}{12} \right] u_{xxxx} + \left[\left(\theta^2 - \theta + \frac{1}{3} \right) \alpha^3 (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \alpha^2 \Delta t (\Delta x)^2 + \frac{1}{360} \alpha (\Delta x)^4 \right] u_{xxxxxx} + \dots \quad (4.89)$$

Предложенный комбинированный метод абсолютно устойчив при $1/2 \leq \theta \leq 1$. Однако, если $0 \leq \theta < 1/2$, этот метод устойчив лишь при

$$0 \leq r \leq 1/(2 - 4\theta). \quad (4.90)$$

4.2.6. Комбинированный метод В

Рихтмайер и Мортон [Richtmyer, Morton, 1967] предложили общую трехслойную неявную схему решения уравнения теплопроводности

$$(1 + \theta) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \alpha \frac{\delta_x^2 u_j^{n+1}}{(\Delta x)^2}. \quad (4.91)$$

При произвольном θ эта схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$, за исключением частных случаев:

- (а) $\theta = 1/2$, погрешность аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$.

(b) $\theta = \frac{1}{2} + \frac{(\Delta x)^2}{12\alpha \Delta t}$, погрешность аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^4)$, причем погрешности аппроксимации определяют из модифицированного уравнения

$$u_t - \alpha u_{xx} = \left[-\left(\theta - \frac{1}{2}\right) \alpha^2 \Delta t + \frac{1}{12} \alpha (\Delta x)^2 \right] u_{xxxx} + \dots \quad (4.92)$$

4.2.7. Метод Дюфорты — Франкела

Абсолютно неустойчивый метод Рундсона (4.80) можно сделать устойчивым, заменив u_j^n на среднее по времени значение $(u_j^{n+1} + u_j^{n-1})/2$. В результате получим явную трехслойную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad (4.93)$$

впервые предложенную Дюфортом и Франкелом [DuFort, Frankel, 1953]. Переписав уравнение (4.93) в виде

$$u_j^{n+1} (1 + 2r) = u_j^{n-1} + 2r (u_{j+1}^n - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n), \quad \text{где } r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad (4.94)$$

обнаружим, что в него входит лишь одна неизвестная величина u_j^{n+1} , и, следовательно, схема явная. Схема Дюфорты — Франкела имеет погрешность аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta t/\Delta x)^2)$. Поэтому если она удовлетворяет условию согласованности, то $(\Delta t/\Delta x)^2$ должно стремиться к нулю при Δt и Δx , стремящихся к нулю. В гл. 3 было показано, что если отношение $\Delta t/\Delta x$ стремится не к нулю, а к некоторой константе γ , то схема Дюфорты — Франкела согласована с гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Если при стремлении Δt и Δx к нулю r остается постоянным, то величина $(\Delta t/\Delta x)^2$ формально имеет порядок $O(\Delta t)$. Тогда модифицированное уравнение имеет вид

$$u_t - \alpha u_{xx} = \left[\frac{1}{12} \alpha (\Delta x)^2 - \alpha^3 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right] u_{xxxx} + \left[\frac{1}{360} \alpha (\Delta x)^4 - \frac{1}{3} \alpha^3 (\Delta t)^2 + 2\alpha^5 \frac{(\Delta t)^4}{(\Delta x)^4} \right] u_{xxxxx} + \dots \quad (4.95)$$

Коэффициент перехода

$$G = \frac{2r \cos \beta \pm \sqrt{1 - 4r^2 \sin^2 \beta}}{1 + 2r} \quad (4.96)$$

при $r = 1/2$ изображен на рис. 4.14. Схема Дюфорта — Франкела обладает необычным для явных схем свойством — безусловной устойчивостью.

4.2.8. Методы решения двумерного уравнения теплопроводности

Двумерное (2-D) уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (4.97)$$

Так как это уравнение отличается от одномерного (1-D) уравнения теплопроводности, то необходимо аккуратно проанализировать возможность применения для его решения методов, описанных в предыдущих разделах. Приведем два примера, иллюстрирующих возникающие при этом проблемы. Если для решения двумерного уравнения теплопроводности применим простой явный метод, то получим следующую разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right], \quad (4.98)$$

где $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$. Как показано в гл. 3, условие устойчивости этой схемы имеет вид

$$\alpha \Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right] \leq \frac{1}{2},$$

т. е. при $(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2$ схема устойчива, только если $r \leq 1/4$. Это условие накладывает в два раза более жесткое ограничение на соотношение шагов по времени и пространству по сравнению с одномерным случаем (условием $r \leq 1/2$) и, следовательно, делает применение явного метода на практике еще менее целесообразным.

Применяя для решения двумерного уравнения теплопроводности метод Кранка — Николсона, получаем разностную схему

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2} (\hat{\delta}_x^2 + \hat{\delta}_y^2) (u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n). \quad (4.99)$$

Для сокращения записи здесь введены двумерные центрально-разностные операторы $\hat{\delta}_x^2$ и $\hat{\delta}_y^2$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{\delta_x^2 u_{i,j}^n}{(\Delta x)^2}, \\ \hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^n &= \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} = \frac{\delta_y^2 u_{i,j}^n}{(\Delta y)^2}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Как и в одномерном случае, схема Кранка — Николсона абсолютно устойчива, если применяется для решения уравнения с периодическими граничными условиями. К сожалению, получающаяся в результате система линейных алгебраических уравнений не является больше трехдиагональной, так как в разностные уравнения входят пять неизвестных $u_{i,j}^{n+1}$, $u_{i+1,j}^{n+1}$, $u_{i-1,j}^{n+1}$, $u_{i,j+1}^{n+1}$, $u_{i,j-1}^{n+1}$. То же самое верно и для всех описанных ранее неав-

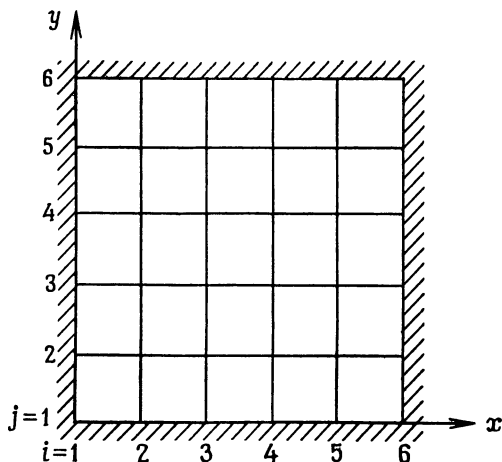


Рис. 4.15. Двумерная расчетная сетка; $u = u_0 = \text{const}$ на границе.

ных разностных схем. Чтобы подробнее изучить получающуюся систему уравнений, перепишем уравнение (4.99) в виде

$$au_{i,j-1}^{n+1} + bu_{i-1,j}^{n+1} + cu_{i,j}^{n+1} + bu_{i+1,j}^{n+1} + au_{i,j+1}^{n+1} = d_{i,j}^n, \quad (4.101)$$

где

$$a = -\frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta y)^2} = -\frac{1}{2} r_y,$$

$$b = -\frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} = -\frac{1}{2} r_x,$$

$$c = 1 + r_x + r_y,$$

$$d_{i,j}^n = u_{i,j}^n + \frac{\alpha \Delta t}{2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{i,j}^n.$$

Используя схему (4.101) для решения уравнения на двумерной сетке 6×6 , показанной на рис. 4.15, получим, что на каждом

Шаг 1

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} = \alpha (\hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^{n+1/2} + \hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^n).$$

Шаг 2

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \alpha (\hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^{n+1/2} + \hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^{n+1}). \tag{4.103}$$

В результате проведенного «расщепления» задача сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. На шаге 1 такая система решается для каж-

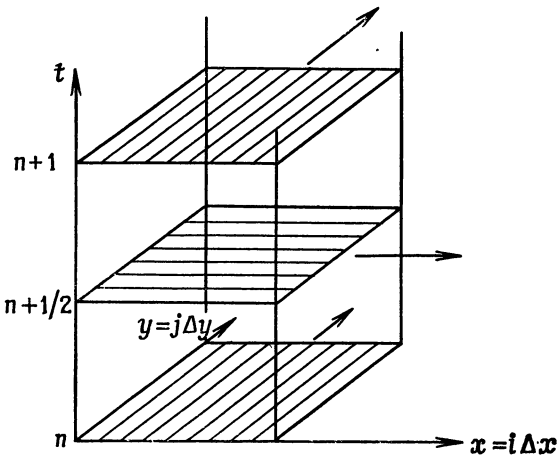


Рис. 4.16. Схема расчета неявным методом переменных направлений. Стрелками указаны направления, по которым схема неявна.

дой строки (ряда точек с фиксированным j), а на шаге 2 — для каждого столбца (ряда точек с фиксированным i). Схематически рассматриваемая процедура решения уравнения теплопроводности показана на рис. 4.16. Неявный метод переменных направлений обладает вторым порядком точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$. Проанализировав выражение для коэффициента перехода

$$G = \frac{[1 - r_x (1 - \cos \beta_x)] [1 - r_y (1 - \cos \beta_y)]}{[1 + r_x (1 - \cos \beta_x)] [1 + r_y (1 - \cos \beta_y)]},$$

находим, что этот метод безусловно устойчив. Здесь необходимо отметить, что получающаяся при наиболее очевидном обобщении

нии этого метода на трехмерный случай разностная схема (трехшаговая схема, использующая значения величин на шагах по времени $n, n + 1/3, n + 2/3, n + 1$) оказывается лишь условно устойчивой и имеет погрешность аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2, (\Delta z)^2)$. Для того чтобы обойти это, Дуглас и Ганн [Douglas, Gunn, 1964] предложили общий метод построения неявных схем переменных направлений, имеющих второй порядок точности и безусловно устойчивых. Применяя этот метод, можно обобщить схему Кранка — Николсона на случай трехмерного уравнения теплопроводности. В результате получим следующую трехшаговую схему:

Шаг 1

$$u^* - u^n = \frac{r_x}{2} \delta_x^2 (u^* + u^n) + r_y \delta_y^2 u^n + r_z \delta_z^2 u^n.$$

Шаг 2

$$u^{**} - u^n = \frac{r_x}{2} \delta_x^2 (u^* + u^n) + \frac{r_y}{2} \delta_y^2 (u^{**} + u^n) + r_z \delta_z^2 u^n. \quad (4.104)$$

Шаг 3

$$u^{n+1} - u^n = \frac{r_x}{2} \delta_x^2 (u^* + u^n) + \frac{r_y}{2} \delta_y^2 (u^{**} + u^n) + \frac{r_z}{2} \delta_z^2 (u^{n+1} + u^n).$$

Здесь верхние индексы * и ** обозначают промежуточные значения, а индексы i, j, k опущены во всех членах уравнений.

4.2.10. Методы дробных шагов, или методы расщепления

Неявные методы переменных направлений тесно связаны, а иногда и совпадают с *методами расщепления*, или, как их еще иногда называют, *методами дробных шагов*, которые были созданы советскими математиками примерно в то же время, когда в США были разработаны неявные методы переменных направлений. Основная идея этих методов состоит в расщеплении конечно-разностного оператора на ряд одномерных операторов. Например, к простой неявной схеме решения двумерного уравнения теплопроводности можно применить метод расщепления следующим образом:

Шаг 1

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^{n+1/2}.$$

Шаг 2

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = \alpha \hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^{n+1}. \quad (4.105)$$

Эта схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$. Подробно метод дробных шагов описан в монографии Н. Н. Яненко [1967].

4.2.11. Явные методы переменных направлений

Для решения двумерного уравнения теплопроводности можно также воспользоваться явным методом переменных направлений. В отличие от неявного метода переменных направлений он не требует обращения трехдиагональных матриц. Так как явный метод переменных направлений можно использовать для решения одномерного уравнения теплопроводности, для простоты ограничимся применением явного метода переменных направлений к этому уравнению.

Впервые явный метод переменных направлений был предложен В. К. Саулевым [1957]. Применяя этот метод, получим двухшаговую разностную схему:

Шаг 1

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_j^{n+1} - u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (4.106)$$

Шаг 2

$$\frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1}}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_j^{n+1} - u_j^{n+2} + u_{j+1}^{n+2}}{(\Delta x)^2}.$$

На шаге 1 разностные уравнения решаются маршевым методом от левой границы к правой. При таком марше величина u_{j-1}^{n+1} всегда известна, поэтому неизвестная u_j^{n+1} определяется «явно». Аналогично на шаге 2 уравнения решаются маршевым методом от правой границы к левой, и схема снова является «явной», так как значение u_{j+1}^{n+2} уже известно. При этом предполагается, что значения функции u на границе области известны. Хотя рассматриваемая схема является трехслойной по времени, для хранения в памяти ЭВМ величины u достаточно одного массива, благодаря тому что при расчете значение u в каждом узле сетки используется лишь один раз. Явная схема переменных направлений безусловно устойчива и имеет погрешность аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta t/\Delta x)^2)$. Из-за наличия в погрешности аппроксимации члена $(\Delta t/\Delta x)^2$ эта разностная схема формально имеет первый порядок точности.

Другой вариант явного метода переменных направлений предложен Баракатом и Кларком [Barakat, Clark, 1966]. Маршевым методом одновременно решаются уравнения в обоих направлениях, а полученные решения r_j^{n+1} и q_j^{n+1} осредняются для на-

хождения u_j^{n+1} :

$$\begin{aligned}\frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t} &= \alpha \frac{p_{j-1}^{n+1} - p_j^{n+1} - p_j^n + p_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}, \\ \frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} &= \alpha \frac{q_{j-1}^n - q_j^n - q_j^{n+1} + q_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}, \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} (p_j^{n+1} + q_j^{n+1}).\end{aligned}\quad (4.107)$$

Этот метод абсолютно устойчив, а его погрешность аппроксимации близка к $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$, так как при одновременном расчете маршевым методом члены, содержащие $(\Delta t/\Delta x)^2$, имеют тенденцию к взаимному сокращению. Известны результаты, показывающие, что для двумерного уравнения теплопроводности этот метод в 18/16 раза быстрее неявного метода переменных направлений.

Ларкин [Larkin, 1964] предложил слегка измененный вариант этого алгоритма, состоящий фактически в замене, где это возможно, p и q на u :

$$\begin{aligned}\frac{p_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \alpha \frac{p_{j-1}^{n+1} - p_j^{n+1} - u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}, \\ \frac{q_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \alpha \frac{u_{j-1}^n - u_j^n - q_j^{n+1} + q_{j+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}, \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} (p_j^{n+1} + q_j^{n+1}).\end{aligned}\quad (4.108)$$

Численные эксперименты показали, что эта схема обычно уступает в точности схеме Бараката и Кларка.

4.2.12. Блочный метод Келлера и модифицированный блочный метод

Блочный метод Келлера [Keller, 1970] широко применяется для решения двумерных параболических уравнений в частных производных, например двумерного уравнения теплопроводности или уравнений пограничного слоя. Оба метода — и метод Келлера, и модифицированный блочный метод — будут рассмотрены в п. 7.3.5 для решения уравнения теплопроводности.

4.2.13. Метод «классики»

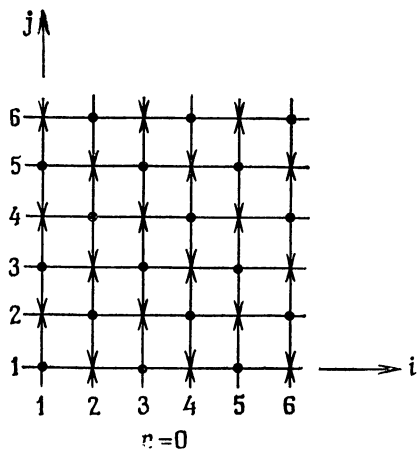
Последним из методов решения двумерного уравнения теплопроводности рассмотрим метод «классики» (hopscotch). Это явный абсолютно устойчивый метод. Схема расчета иллюстри-

руется на рис. 4.17 и состоит из двух последовательных проходов всей расчетной области. При первом проходе величина $u_{i,j}^{n+1}$ вычисляется в тех узлах сетки, где $(i + j + n)$ — четное число, по простой явной схеме

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha (\delta_x^2 u_{i,j}^n + \delta_y^2 u_{i,j}^n). \quad (4.109)$$

При втором проходе величина $u_{i,j}^{n+1}$ вычисляется в оставшихся узлах сетки (в тех узлах сетки, где $(i + j + n)$ — нечетное число) по простой неявной схеме

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha (\delta_x^2 u_{i,j}^{n+1} + \delta_y^2 u_{i,j}^{n+1}). \quad (4.110)$$



Второй проход кажется неявным, но решать систему алгебраических уравнений не надо, так как величины $u_{i+1,j}^{n+1}$, $u_{i-1,j}^{n+1}$, $u_{i,j+1}^{n+1}$, $u_{i,j-1}^{n+1}$ нам уже известны из первого прохода, т. е. рассматриваемая схема явная. Погрешность аппроксимации метода «классики» равна $O(\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$.

Рис. 4.17. Схема расчета «классики». Крестики для нечетных $(i + j + n)$; кружки для четных $(i + j + n)$.

4.2.14. Дополнительные замечания

Выбор наилучшего метода решения уравнения теплопроводности является нелегким делом из-за того, что существует большое разнообразие приемлемых методов. Обычно неявные методы больше подходят для их решения, чем явные методы. Для решения одномерного уравнения теплопроводности мы рекомендуем схему Кранка — Николсона, так как она обеспечивает второй порядок точности по времени и пространству. Для двух- и трехмерного уравнений теплопроводности превосходные результаты получаются при использовании как неявного метода переменных направлений Дугласа и Ганна, так и блочного метода Келлера или модифицированного блочного метода.

§ 4.3. Уравнение Лапласа

Уравнение Лапласа является модельным уравнением для эллиптических уравнений в частных производных. В декартовой системе координат двумерное уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4.111)$$

Некоторые важные задачи, часто встречающиеся в приложениях, сводятся к решению одного эллиптического уравнения в частных производных. К ним относятся задачи расчета дозвукового безвихревого (потенциального) течения газа и определения стационарного поля температуры в твердом теле.

Уравнения Навье—Стокса для несжимаемой жидкости — пример более сложной системы уравнений, имеющей эллиптический характер. Стационарные уравнения Навье—Стокса эллиптические, но их эллиптичность проявляется довольно сложным образом, так как эллиптический характер уравнения определяется и производными скорости, и производными давления. Нестационарные уравнения Навье—Стокса являются уравнениями смешанного эллиптически-параболического типа. Смешанный характер уравнений Навье—Стокса лучше всего подтверждается тем, что при численном решении этих уравнений они преобразуются к системе уравнений, из которых хотя бы одно параболическое, а одно — эллиптическое уравнение Пуассона вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (4.112)$$

Итак, уравнения в частных производных эллиптического типа встречаются в задачах гидродинамики и теплообмена довольно часто, поэтому мы внимательно рассмотрим различные методы решения нашего модельного эллиптического уравнения.

4.3.1. Конечно-разностные аналоги уравнения Лапласа

Методы решения уравнения Лапласа, да и вообще большинства эллиптических уравнений различаются не столько методом построения конечно-разностного аналога (хотя и эти методы отличаются), сколько методом решения получающейся системы алгебраических уравнений.

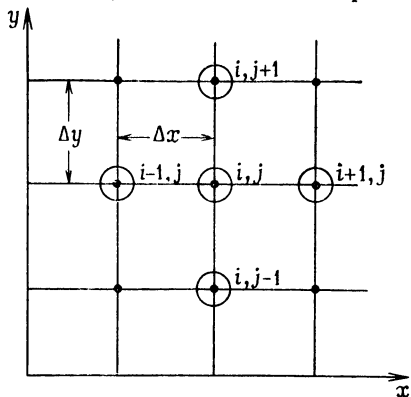
Пятиточечная схема. Наиболее часто для построения конечно-разностного аналога уравнения Лапласа используется пятиточечная схема, предложенная Рунге в 1908 г.:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (4.113)$$

с погрешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$. Модифицированное уравнение имеет вид

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{1}{12} [u_{xxxx} (\Delta x)^2 + u_{yyyy} (\Delta y)^2] + \dots$$

Девятиточечная схема. Эта схема представляется наиболее логичной, если мы хотим решить уравнение Лапласа по схеме

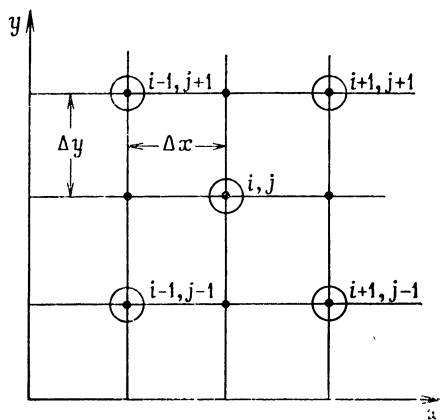


(a)

высокого порядка точности. Пусть $\Delta x = h, \Delta y = k$, тогда разностная схема имеет вид

$$\begin{aligned} &u_{i+1, j+1} + u_{i-1, j+1} + \\ &+ u_{i+1, j-1} + u_{i-1, j-1} - \\ &- 2 \frac{h^2 - 5k^2}{h^2 + k^2} (u_{i+1, j} + u_{i-1, j}) + \\ &+ 2 \frac{5h^2 - k^2}{h^2 + k^2} (u_{i, j+1} + u_{i, j-1}) - \\ &- 20u_{i, j} = 0. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Погрешность аппроксимации этой схемы имеет порядок $O(h^4, k^4)$, однако на квадратной сетке этот порядок повышается до $O(h^6)$. Найти погрешность аппроксимации и получить модифицированное уравнение мы предложим читателям в задачах к этой главе. Девятиточечная схема кажется довольно привлекательной для уравнения Лапласа из-за подходящей ошибки аппроксимации, но для уравнений более общего вида (в том числе и для уравнения Пуассона), содержащих другие члены, она имеет погрешность аппроксимации лишь $O(h^2, k^2)$.



(b)

Рис. 4.18. Шаблоны, используемые для расчета по двум пятиточечным схемам при $\Delta x = \Delta y$. (a) Пятиточечная схема; (b) диагональная пятиточечная схема.

Другие разностные схемы для уравнения Лапласа. Так как оператор Лапласа инвариантен относительно поворота системы координат, то не удивительно, что на квадратной сетке ($\Delta x =$

$= \Delta y = h$) вместо четырех точек шаблона схемы (4.113) можно использовать точки, в которые они переходят при повороте на 45° относительно узла (i, j) и одновременном увеличении шага сетки до $\sqrt{2}h$. В результате получается диагональная пятиточечная схема решения уравнения Лапласа:

$$u_{i+1, j+1} + u_{i+1, j-1} + u_{i-1, j-1} + u_{i-1, j+1} - 4u_{i, j} = 0. \quad (4.115)$$

На рис. 4.18 показано расположение узлов разностной сетки, используемых при аппроксимации оператора Лапласа по двум пятиточечным разностным схемам. Погрешность аппроксимации диагональной пятиточечной разностной схемы составляет $O(h^2)$ (см. задачу 3.10).

В литературе приводятся и другие разностные схемы решения уравнения Лапласа (см., например, [Thom, Apelt, 1961]), но ни одна из них не обладает сколь-нибудь заметными преимуществами перед приведенными пяти- и девятиточечной схемами. Для повышения порядка аппроксимации приходится увеличивать число точек в шаблоне, поэтому при использовании таких схем трудно обеспечить высокий порядок точности вблизи границ.

4.3.2. Простой пример применения разностной схемы для решения уравнения Лапласа

Рассмотрим задачу нахождения функции u , удовлетворяющей уравнению Лапласа $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$ в квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, если на границе заданы условия Дирихле.

Решение поставленной задачи можно найти в виде суммы ряда (используя метод разделения переменных), коэффициенты которого подбираются так, чтобы удовлетворить заданным условиям для u на границе. Такое решение приведено в большинстве книг, посвященных теплопередаче (см., например, [Charman, 1974]), и может быть использовано для проверки конечно-разностных схем. Есть и другой способ проверки разностной схемы. Возьмем какую-нибудь простую функцию, являющуюся решением уравнения Лапласа в квадратной области, например функцию $u = x^2 - y^2$, и используем ее для задания граничных условий при конечно-разностном решении этого уравнения. Тогда результаты расчета можно сравнить с функцией $u = x^2 - y^2$. В этом примере мы используем пятиточечную схему (4.113), положив $\Delta x = \Delta y = 0.1$, т. е. построим равномерную сетку 11×11 в квадратной области (рис. 4.19). При $\Delta x = \Delta y$ разностные уравнения имеют вид

$$u_{i+1, j} + u_{i-1, j} + u_{i, j+1} + u_{i, j-1} - 4u_{i, j} = 0 \quad (4.116)$$

во всех узлах сетки, в которых величина u неизвестна, т. е. для рассматриваемой задачи с граничными условиями Дирихле в 81 узле. В каждом из этих узлов должно удовлетворяться разностное уравнение, поэтому одновременно надо решить 81 линейное алгебраическое уравнение с 81 неизвестным $u_{i,j}$. Математически такую систему уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n &= c_1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n &= c_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + a_{nn}u_n &= c_n, \end{aligned} \quad (4.117)$$

или более компактно: $[A]u = C$, где $[A]$ — известная матрица коэффициентов, u — вектор-столбец, элементы которого надо оп-

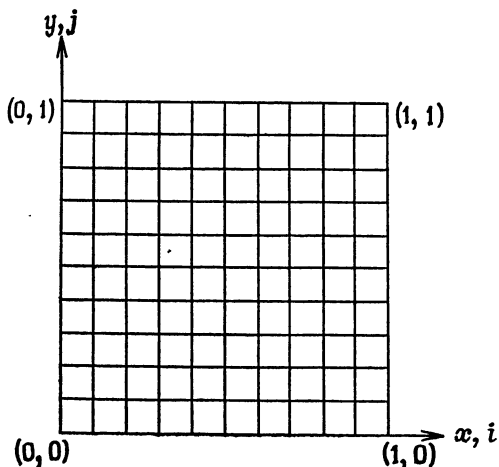


Рис. 4.19. Конечно-разностная сетка для решения уравнения Лапласа.

ределить, а C — известный вектор-столбец. Стоит заметить, что матрица коэффициентов разреженная, так как 76 из 81 величины a в каждой строке равны нулю. Для того чтобы получить наиболее простую систему алгебраических уравнений, положим $\Delta x = \Delta y$. Если $\Delta x \neq \Delta y$, то выражения для коэффициентов уравнения становятся немного более сложными, но система алгебраических уравнений остается линейной и также может быть записана в виде $[A]u = C$.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разделить на прямые и итерационные. *Прямыми* называются методы, позволяющие за конечное число заранее опре-

деленных операций найти точное (если пренебречь ошибками округления) решение системы уравнений. Алгоритм получения решения такими методами обычно оказывается довольно сложным. *Итерационные* методы сводятся к последовательному применению относительно простого алгоритма, они позволяют получить точное решение лишь в пределе. Однако если итерационный процесс сходится, то результат, отличающийся от точного решения на величину, меньшую некоторого наперед заданного значения ε , можно получить за конечное, хотя заранее и неизвестное, число операций. Приведем несколько примеров прямых и итерационных методов решения систем линейных уравнений.

4.3.3. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Правило Крамера. Это один из самых простых методов. Все студенты наверняка слышали о нем, и большинство из них знакомы с процедурой этого метода. К сожалению, он требует чрезвычайно больших затрат машинного времени. Число операций, необходимых для решения системы уравнений, пропорционально $(N + 1)!$, где N — число неизвестных. Много ужасных историй рассказывалось о большом времени, затрачиваемом на решение уравнений по правилу Крамера. Излюбленный пример приводится Роучем [Roache, 1972]. Для решения по правилу Крамера системы 26 уравнений с 26 неизвестными на ЭВМ CDC 6600 потребуется 10^{16} лет. Это в 10^6 раз больше оцениваемого современной наукой времени существования Вселенной! Не вызывает сомнения, что до тех пор, пока выбор метода в наших руках, мы никогда не воспользуемся для решения уравнений правилом Крамера.

Метод исключения Гаусса. Метод исключения Гаусса — очень полезный и эффективный метод решения многих систем алгебраических уравнений, особенно систем уравнений с трехдиагональной матрицей. Однако для систем алгебраических уравнений более общего вида, возникающих при конечно-разностной аппроксимации уравнений в частных производных, он уступает в быстродействии некоторым другим методам. При решении этим методом системы N уравнений требуется примерно N^3 операций. Кроме того, накапливающаяся при выполнении большого числа операций ошибка округления иногда приводит к снижению точности получаемых результатов, если N велико. На самом деле точность метода во многом определяется конкретным видом системы уравнений, и вопрос о точности метода слишком сложен, чтобы можно было ответить на него простым утверждением общего характера. Если преобразовать систему уравнений так,

чтобы наибольшие по абсолютной величине коэффициенты были, насколько это возможно, расположены на главной диагонали, то точность получаемых методом Гаусса результатов повысится.

В дальнейшем мы будем использовать метод Гаусса для решения систем уравнений с трехдиагональной матрицей, возникающих при применении неявных разностных схем к решению маршевых задач. Пока же покажем, как применяется метод исключения Гаусса для решения систем алгебраических уравнений общего вида. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots &= c_1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots &= c_2, \\ \vdots & \\ a_{n1}u_1 + \dots &= c_n. \end{aligned} \tag{4.118}$$

Приведем ее к верхнему диагональному виду, исключив с помощью алгебраических операций часть неизвестных из некото-

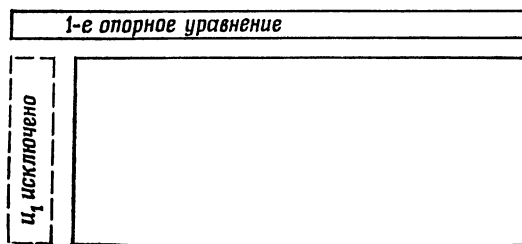


Рис. 4.20. Метод исключения Гаусса, неизвестная u_1 под главной диагональю исключена.

рых уравнений. Выберем, например, в качестве опорного первое уравнение (строку) рассматриваемой системы и используем его для исключения неизвестной u_1 из расположенных ниже уравнений. Для этого сначала умножим первое уравнение на a_{21}/a_{11} ¹⁾ и вычтем его из второго уравнения системы, что позволит исключить u_1 из второго уравнения. Умножая опорное уравнение на a_{31}/a_{11} и вычитая результат из третьего уравнения, исключим из него u_1 . Таким образом, можно исключить u_1 из всех уравнений от 2-го до n -го. В результате система уравнений примет вид, изображенный на рис. 4.20.

Теперь второе уравнение (в том виде, какой оно приняло после применения описанной выше процедуры исключения) ис-

¹⁾ Чтобы избежать деления на нуль, мы всегда можем поменять уравнения местами.

пользуем в качестве опорного для исключения неизвестной u_2 во всех ниже расположенных уравнениях, что приведет систему уравнений к виду, показанному на рис. 4.21. Третье уравнение полученной системы используется как опорное для исключе-

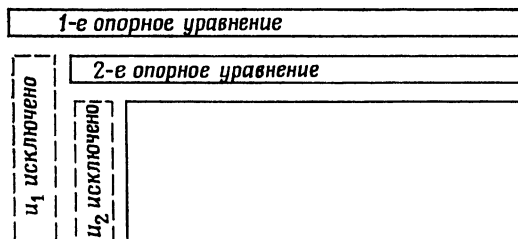


Рис. 4.21. Метод исключения Гаусса, неизвестные u_1 и u_2 под главной диагональю исключены.

ния u_3 . Этот процесс продолжается до тех пор, пока система уравнений не приведет к верхнему треугольному виду

$$\begin{aligned}
 a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots &= c_1, \\
 a'_{22}u_2 + a'_{23}u_3 + \dots &= c'_2, \\
 a'_{33}u_3 + \dots &= c'_3, \\
 &\vdots \\
 a'_{nn}u_n &= c'_n.
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

В результате в последнее уравнение входит лишь одно неизвестное, в предпоследнее — два и т. д., поэтому полученную систему уравнений можно решить последовательной обратной постановкой.

В качестве числового примера рассмотрим систему трех уравнений

$$\begin{aligned}
 U_1 + 4U_2 + U_3 &= 7, \\
 U_1 + 6U_2 - U_3 &= 13, \\
 2U_1 - U_2 + 2U_3 &= 5.
 \end{aligned}$$

Используя первое уравнение в качестве опорного, исключим U_1 из двух последних уравнений:

$$\begin{aligned}
 U_1 + 4U_2 + U_3 &= 7, \\
 2U_2 - 2U_3 &= 6, \\
 -9U_2 + 0 &= -9.
 \end{aligned}$$

Теперь выберем опорным второе уравнение и приведем систему

к верхнему треугольному виду

$$\begin{aligned} U_1 + 4U_2 + U_3 &= 7, \\ 2U_2 - 2U_3 &= 6, \\ -9U_3 &= 18. \end{aligned}$$

Используя обратную подстановку, получаем $U_3 = -2$, $U_2 = 1$, $U_1 = 5$.

При решении уравнения Лапласа блочными итерационными методами (см. п. 4.3.4) приходится решать системы уравнений с трехдиагональной матрицей. В § 4.1 и 4.2 было показано, что такие системы уравнений получаются также в случае применения неявных разностных схем к решению маршевых задач для уравнений в частных производных. Покажем, как эффективно модифицировать метод исключения Гаусса для решения систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей на примере неявной разностной схемы для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}).$$

Используя обозначения, введенные для записи систем уравнений, перепишем эту схему в виде

$$bu_{j-1}^{n+1} + du_j^{n+1} + au_{j+1}^{n+1} = c,$$

где

$$a = b = -\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad c = u_j^n, \quad d = 1 + \frac{2\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Если заданы условия Дирихле, то на одной границе известно u_{j-1}^{n+1} , а на другой известно u_{j+1}^{n+1} . Все известные значения u включены в коэффициент c , поэтому наша система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & b_4 & d_4 & a_4 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_{NJ} & d_{NJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{NJ}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{NJ} \end{bmatrix}.$$

Систему уравнений можно привести к такому виду и в тех случаях, когда заданы другие граничные условия, хотя при этом первое и последнее уравнения могут получаться из некоторых дополнительных соотношений, связанных с граничными условиями, а не только из записанных во внутренних узлах сетки разностных уравнений.

Для решения систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей разработана модификация метода Гаусса, использующая нули в матрице коэффициентов. Эта процедура, называемая *прогонкой* и предложенная Томасом [Thomas, 1949], кратко описана в п. 4.1.4.

Метод прогонки. Приведенная выше система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей приводится к верхнему треугольному виду заменой коэффициентов d_j по формуле

$$d_j = d_j - \frac{b_j}{d_{j-1}} a_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, NJ,$$

и коэффициентов c_j по формуле

$$c_j = c_j - \frac{b_j}{d_{j-1}} c_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, NJ.$$

После этого, начиная с $u_{NJ} = c_{NJ}/d_{NJ}$, проводится обратная подстановка для вычисления неизвестных:

$$u_k = \frac{c_k - a_k u_{k+1}}{d_k}, \quad k = NJ - 1, NJ - 2, \dots, 1.$$

В приведенных выше соотношениях знак равенства понимается в смысле «заменить на», как это принято в языке программирования Фортран. Написанная на языке Фортран программа решения уравнений методом прогонки приведена в приложении А.

При применении метода прогонки необходимо проявить определенную гибкость для задания граничных условий. Лучше всего читателю научиться этому на основе личного опыта, мы же ограничимся одним-двумя замечаниями. Так как целью метода исключения является определение значений неизвестных, то при решении задачи Дирихле, когда значения u на границе известны, мы не должны включать их в число неизвестных. Тогда в методе исключения u_1 соответствует значению u в первой неграничной точке, а u_{NJ} — значению u в последней неграничной точке. Однако ничего плохого не произойдет, а алгоритм даже упростится, если мы зададим a_1, d_1, b_{NJ}, d_{NJ} так, чтобы вместо граничных условий дополнить систему двумя дополнительными

уравнениями. Например, полагая $d_1 = 1$, $a_1 = 0$, $d_{NJ} = 1$, $b_{NJ} = 0$, $c_1 = u_1^{n+1}$ (задано) и $c_{NJ} = u_{NJ}^{n+1}$ (задано), получаем, что первое и последнее алгебраические уравнения просто повторяют граничные условия. Приведем еще один пример, показывающий, как можно получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей при других граничных условиях. Пусть при решении уравнения теплопроводности стенка является теплопроводной, т. е. на ней заданы смешанные граничные условия

$$h(u_\infty - u_w) = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_w.$$

Применяя метод контрольного объема на той границе области, где $j = 1$, получаем разностное уравнение

$$d_1 u_1^{n+1} + a_1 u_2^{n+1} = c_1,$$

где

$$d_1 = 1 + \frac{2\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \left(1 + \frac{h\Delta x}{k}\right),$$

$$a_1 = \frac{-2\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad c_1 = \frac{2\alpha(\Delta t)h(\Delta x)}{(\Delta x)^2 k} u_\infty + u_1^n;$$

причем это уравнение, очевидно, не меняет трехдиагонального вида матрицы для коэффициентов первого уравнения.

Современные прямые методы. Существуют, конечно, и более быстрые, чем метод исключения Гаусса, прямые методы решения систем алгебраических уравнений. К сожалению, ни один из этих методов не является достаточно общим. Обычно они позволяют решать только алгебраические уравнения, возникающие при применении разностных схем определенного типа, да и то при специальном задании граничных условий. Большинство таких методов имеет ограниченную размерность (могут быть использованы для решения лишь небольших систем уравнений) из-за накапливания погрешности округления. Если рассматривать быстрые прямые методы как специальный класс, то их алгоритмы довольно сложны и нелегко приспособляются для решения задач в областях неправильной формы или на случай задания сложных граничных условий. Прямые методы требуют обычно существенно большей памяти ЭВМ, чем применяемые для решения тех же задач итерационные методы. По-видимому, недостатком простых быстрых прямых методов является их ограниченная размерность, что сужает возможную область их применения; методы же, не страдающие этим недостатком, обладают алгоритмами, содержащими ряд деталей, изложение которых выходит за рамки данной книги. Поэтому мы лишь кратко

охарактеризуем некоторые из этих методов, не описывая ни один из них подробно.

Одним из простейших прямых методов является метод расчета распространения вектора ошибки, разработанный для решения уравнения Пуассона Роучем [Roache, 1972]. Размерность этого метода ограничена, но так как метод прямой, то в тех тестовых задачах, когда удалось проконтролировать рост погрешности округления, он оказался в 10—100 раз быстрее лучших итерационных методов, которые будут описаны ниже.

Для решения уравнения Пуассона разработано два быстрых прямых метода, имеющих неограниченную размерность. Это — двойная циклическая редукция Бунемана [Buneman, 1969] и быстрое преобразование Фурье Хокни [Hockney, 1965; 1970]. Интересные вычисления проведены Лугтом и Орингом [Lugt, Ohring, 1974] при решении двумерных уравнений Навье — Стокса. Они заметили, что методы Бунемана и Хокни оказываются в 10—20 раз быстрее лучших итерационных методов. Полезное обсуждение возможности применения быстрого преобразования Фурье для решения уравнений в частных производных проведено в работах [LeBail, 1972] и [Buzbee et al., 1970]. Применению быстрых прямых методов к решению задач аэродинамики посвящены работы [Martin, Lomax, 1975] и [Schumann, 1980].

Очевидно, быстрые прямые методы имеет смысл применять для решения задач лишь в тех случаях, когда определяющим является время расчета. Заметим еще раз, что реализующие эти методы алгоритмы сложны и предназначены для расчета простых геометрических конфигураций при задании простых граничных условий. Время создания программы решения конкретной задачи быстрым прямым методом велико, поэтому необходимо тщательно взвесить, окупится ли это впоследствии сокращением времени расчета. Для большинства встречающихся в приложениях уравнений эллиптического типа лучше всего использовать описанные ниже итерационные методы.

4.3.4. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассматриваемые в этом разделе методы некоторые называют *релаксационными*, хотя другие авторы предпочитают сохранять слово «релаксация» для обозначения метода релаксации невязки, предложенного Саусвеллом много лет назад. Итерационные методы можно разбить на две группы — *точечные* (или явные) итерационные методы и *блочные* (или неявные) итерационные методы. При использовании явных методов один и тот же простой алгоритм последовательно применяется для опреде-

ления неизвестных в каждой точке, тогда как при использовании неявных методов решение для какой-то группы точек определяется в рамках общей итерационной процедуры методом исключения (или каким-либо другим прямым методом).

Метод Гаусса — Зайделя. Хотя за последние годы предложено множество различных итерационных методов, метод Гаусса — Зайделя является одним из наиболее эффективных и часто используемых явных итерационных методов решения больших систем уравнений. (Иногда его называют методом Либмана, если он применяется для решения разностных уравнений, получающихся при конечно-разностной аппроксимации уравнений в частных производных эллиптического типа.) Метод чрезвычайно прост, но сходится лишь в тех случаях, когда матрица коэффициентов уравнения удовлетворяет специальному условию «диагонального преобладания». К счастью, большинство разностных схем, используемых для решения стационарных задач, приводит к решению систем алгебраических уравнений, удовлетворяющих этому условию. Метод позволяет явным образом учесть разреженность матрицы коэффициентов.

Приведем сначала пример, показывающий простоту рассматриваемого метода, а потом уже сформулируем достаточные условия его сходимости. В тех случаях, когда этот метод можно использовать, решение системы уравнений определяется следующим образом:

1. Задается начальное приближение (при этом, как будет видно из приведенного ниже примера, значение одной из неизвестных можно не задавать).

2. Из каждого уравнения определяют неизвестную, коэффициент перед которой имеет наибольшую абсолютную величину, при этом используются заданные начальные значения и уже вычисленные значения других неизвестных.

3. Процесс решения уравнений повторяется итерационно до тех пор, пока значения неизвестных на двух последовательных итерациях не будут отличаться на достаточно малую величину, при этом надо не забывать подставлять в правую часть каждого уравнения уже вычисленное значение неизвестной.

В качестве примера рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}4x_1 - x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 &= 9, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2.\end{aligned}$$

Сначала приведем ее к виду

$$\begin{aligned}x_1 &= 1/4(4 + x_2 - x_3), \\x_2 &= 1/6(9 - x_1 - 2x_3), \\x_3 &= 1/5(2 + x_1 - 2x_2)\end{aligned}$$

и зададим начальное приближение для x_2 и x_3 (начальное приближение для x_1 задавать не надо). После этого в ходе описанного выше итерационного процесса будем последовательно вычислять x_1, x_2, x_3 .

Достаточное условие сходимости метода Гаусса — Зайделя. Для упрощения записи перепишем систему уравнений так, чтобы по возможности максимальный по абсолютной величине коэффициент в каждой строке был расположен на главной диагонали. Тогда если система уравнений несводима (т. е. не может быть преобразована так, чтобы часть неизвестных определялась из решения системы с меньшим чем n числом уравнений) и если

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (4.120)$$

для всех i и, кроме того, хотя бы для одного i

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad (4.121)$$

то метод Гаусса — Зайделя сходится. Это *достаточное условие сходимости*, т. е. в ряде случаев метод может сходиться и тогда, когда указанные выше условия не выполнены. Можно установить и необходимое условие, но пользоваться ими на практике не имеет смысла. Можно предложить и словесную формулировку достаточного условия сходимости метода Гаусса — Зайделя: метод сходится, если в каждом уравнении абсолютная величина коэффициента, расположенного на главной диагонали, больше или равна сумме абсолютных значений остальных коэффициентов уравнения и хотя бы в одном уравнении выполняется строгое условие больше (при решении физических задач обычно в уравнении, записанном для точки, расположенной вблизи границы).

Воспользуемся теперь приведенными выше условиями сходимости итерационного процесса для анализа системы уравнений (4.113), которая была раньше получена при дискретизации уравнения Лапласа. Прежде всего заметим, что наибольшим по абсолютной величине является коэффициент при неизвестной $u_{i,j}$. Так как уравнение (4.113) записывается в каждой точке,

в которой величина $u_{i,j}$ неизвестна, то легко расположить все уравнения рассматриваемой системы так, что наибольшие по величине коэффициенты будут расположены на главной диагонали. При некотором опыте и соответствующем выборе конечно-разностного аналога уравнений такое диагональное преобладание можно обычно обеспечить при решении любых уравнений эллиптического типа. Если разностное уравнение для u линейно, то можно ожидать, что метод Гаусса — Зайделя сходится в том случае, когда в тех узлах (i, j) , в которых значения $u_{i,j}$ неизвестны, разностные уравнения имеют такой вид, что коэффициент при неизвестной $u_{i,j}$ по абсолютной величине больше или равен сумме абсолютных величин коэффициентов при остальных неизвестных. Строгое условие больше должно выполняться хотя бы для одного уравнения.

Мы не будем приводить доказательство этого достаточного условия сходимости метода Гаусса — Зайделя, а просто попробуем на простом примере пояснить, почему оно должно выполняться. Вернемся к нашему примеру решения системы трех линейных уравнений итерационным методом Гаусса — Зайделя. В каждой точке промежуточное значение x , получаемое в ходе итераций, является суммой точного значения и некоторой погрешности ε , т. е. $x_1 = (x_1)_{\text{exact}} + \varepsilon_1$ и т. д. Условие диагонального преобладания гарантирует убывание ε от итерации к итерации. Действительно, в рассматриваемом примере после одной итерации имеем

$$|\varepsilon_1^2| \leq 1/4 |\varepsilon_2^1| + 1/4 |\varepsilon_3^1|,$$

$$|\varepsilon_2^2| \leq 1/6 |\varepsilon_1^2| + 1/3 |\varepsilon_3^1|,$$

$$|\varepsilon_3^2| \leq 1/5 |\varepsilon_1^2| + 2/5 |\varepsilon_2^2|.$$

Если ε_2^1 и ε_3^1 вначале равнялись 10, то $|\varepsilon_1^2| \leq 5$, а $|\varepsilon_3^1| \leq 1.446$. Верхние индексы используются здесь для обозначения номера итерации.

В заключение отметим, что для выполнения одной итерации может потребоваться до n^2 операций, однако для сильно разреженных матриц объем вычислений существенно сокращается.

Метод последовательной верхней релаксации. Метод последовательной верхней релаксации может быть использован для ускорения сходимости любого итерационного процесса, однако мы рассмотрим его в основном как метод, используемый для улучшения метода Гаусса — Зайделя. Про возникновение этого метода рассказывают одну любопытную (хотя, возможно, и вымышленную) историю о том, как один охотник обнаружил, что

если он целится не в утку, а перед ней, то чаще попадает в цель. Утка — движущаяся мишень, и, предвосхитив ее движение, мы с большей вероятностью попадем в нее. Охотник рассказал о своем открытии соседу — специалисту в области вычислительной математики. Так, если верить этой истории, был создан метод последовательной верхней релаксации.

При решении системы алгебраических уравнений методом Гаусса — Зайделя для достижения требуемой точности приходится совершать несколько последовательных расчетов или итераций. Предположим, что мы наблюдаем за изменением значения неизвестной в некоторой точке на двух последовательных итерациях: тогда, определив направление и скорость ее изменения, можно предположить, что они сохранятся и на следующей итерации. Если пойти дальше, то можно задуматься: а не увеличится ли скорость сходимости итераций при коррекции в соответствии с этой тенденцией неизвестных до проведения следующей итерации? Коррекция неизвестных в любом итерационном методе (в этом разделе мы ведем речь о методе Гаусса — Зайделя лишь потому, что в данный момент изучаем именно этот метод) по формуле

$$(u_{i,j}^{k+1})' = (u_{i,j}^k)' + \omega (u_{i,j}^{k+1} - (u_{i,j}^k)') \quad (4.122)$$

называется *верхней релаксацией*, или *последовательной верхней релаксацией*. Здесь k — номер итерации, $u_{i,j}^{k+1}$ — последнее значение неизвестной $u_{i,j}$, вычисленное по методу Гаусса — Зайделя, $(u_{i,j}^k)'$ — значение $u_{i,j}$ на предыдущей итерации, возможно уже скорректированное по предлагаемой формуле, если метод верхней релаксации применяется последовательно (на каждой итерации), а $(u_{i,j}^{k+1})'$ — новое или «подправленное» значение $u_{i,j}$ на $(k+1)$ -й итерации. Применяя этот метод, мы предполагаем, что $(u_{i,j}^{k+1})'$ будет ближе к точному значению неизвестной, чем значение $u_{i,j}^{k+1}$, полученное методом Гаусса — Зайделя. Формула (4.122) применяется непосредственно в каждой точке на каждой итерации, а во все последующие расчеты входит величина $(u_{i,j}^{k+1})'$, а не $u_{i,j}^{k+1}$. Коэффициент ω называется *параметром релаксации*. Если $1 < \omega < 2$, то говорят, что используется *метод верхней релаксации*. Верхняя релаксация в каком-то смысле аналогична линейной экстраполяции, проводимой по значениям $(u_{i,j}^k)'$ и $u_{i,j}^{k+1}$.

При решении некоторых задач применяют *метод нижней релаксации* ($0 < \omega < 1$). Обычно его используют в тех случаях, когда сходимость решения в точке носит осциллирующий характер, причем в ходе итераций оно стремится как бы «превы-

суть» точное значение. В методе нижней релаксации «подправленное» значение $(u_{i,j}^{k+1})'$ лежит между $(u_{i,j}^k)'$ и $u_{i,j}^{k+1}$. Метод последовательной верхней релаксации обычно дает хорошие результаты при численном решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Метод нижней релаксации обычно используют при решении эллиптических уравнений лишь в том случае, когда уравнения нелинейные. Иногда при решении нелинейных уравнений сходимость численного метода обеспечивается лишь при использовании нижней релаксации.

Мы наложили на параметр релаксации условие $0 < \omega < 2$. Введение такого ограничения на ω связано с тем, что по определению итерационный процесс сходится тогда, когда отличие u от точного решения убывает от итерации к итерации. При $\omega \geq 2$ это отличие будет либо не убывать, либо возрастать, т. е. такой итерационный процесс не может сходиться.

Пока еще мы не ответили на два очень важных вопроса: как выбрать хорошее и даже лучшее значение параметра ω и на сколько при этом ускорится сходимость итерационного процесса? Общих ответов на эти вопросы не существует, но можно привести некоторые полезные соображения.

Если уравнение Лапласа решается (по схеме (4.113)) в прямоугольной области на квадратной сетке ($\Delta x = \Delta y = h$), а на границе заданы условия Дирихле, то оптимальное значение параметра ω (здесь и далее будем обозначать его через ω_{opt}) можно определить теоретически согласно работам [Young, 1954; Frankel, 1950]. Это оптимальное значение ω равно меньшему корню уравнения $t^2\omega^2 - 16\omega + 16 = 0$, где $t = \cos(\pi/p) + \cos(\pi/q)$, а p и q — число отрезков, на которые сетка разбивает каждую из сторон прямоугольника. Приведем один пример. Если $p = q = 45$, то $\omega_{\text{opt}} = 1.87$. Однако в общем случае при решении более сложных эллиптических задач найти ω_{opt} заранее не удастся. В такой ситуации полезными для определения подходящих значений ω могут оказаться численные эксперименты. Теория и численные эксперименты показывают, что обычно лучше задать более высокое, чем ω_{opt} , а не более низкое значение параметра ω . Вопросы определения параметра ω_{opt} рассмотрены в работах [Forsythe, Wasow, 1960; Varga, 1962; Ames, 1977].

Стоит ли тратить время и силы на поиск подходящих значений ω ? Конечно, да, так как в ряде случаев время расчета удастся сократить почти в 30 раз, а это существенно! Разумеется, в некоторых случаях метод последовательной верхней релаксации не дает сколь-нибудь заметного ускорения сходимости, но все равно его стоит попробовать применить, так как не следует игнорировать потенциальную возможность значительного уменьшения времени расчета.

Так как верхнюю релаксацию можно рассматривать как коррекцию результатов, полученных методом Гаусса — Зайделя, на основе линейной экстраполяции с предыдущих итераций, то естественно ожидать, что другие, возможно, более точные (с точки зрения погрешности аппроксимации) экстраполяционные зависимости могут быть использованы для ускорения сходимости итерационного процесса. И действительно, для этих целей успешно применяются экстраполяционные формулы Эйткена и Ричардсона. Соответствующие методы подробно описаны в книгах по вычислительной математике; мы же лишь отметим, что целесообразность использования более сложных методов экстраполяции необходимо тщательно взвесить, так как они ведут к увеличению числа алгебраических действий и требуют большей памяти ЭВМ. К преимуществам метода последовательной верхней релаксации относятся его простота и то, что при включении его в алгоритм можно обойтись без введения дополнительных массивов.

Блочные итерационные методы. Метод Гаусса — Зайделя с последовательной верхней релаксацией является лучшим из пока подробно рассмотренных в этой главе методов решения эллиптических уравнений. Обычно количество итераций можно сократить, используя блочные итерационные методы. Однако при этом увеличивается число алгебраических операций на каждой итерации, и заранее не ясно, компенсирует ли уменьшение количества итераций увеличение времени счета на каждой итерации. Этот вопрос для каждой задачи надо решать конкретно. Можно привести примеры, когда применение блочных итерационных методов позволило действительно сократить суммарное время решения задачи, поэтому эти методы заслуживают внимательного изучения. Интересное сопоставление скорости сходимости точечных (явных) и блочных итерационных методов проведено в работах [Forsythe, Wasow, 1960; Ames, 1977].

Основная идея блочных (или групповых) итерационных методов состоит в том, что выделяется некоторая подгруппа неизвестных и их значения подправляются одновременно путем решения системы алгебраических уравнений методом исключения. Поэтому блочные итерационные методы носят неявный характер, иногда их называют *неявными итерационными методами*. В большинстве блочных итерационных методов подгруппы неизвестных выбираются так, чтобы в результате получилась система уравнений с трехдиагональной матрицей, которую можно эффективно решить методом прогонки. Простейшим блочным итерационным методом является *последовательная верхняя релаксация по строкам*.

Последовательная верхняя релаксация по строкам. Хотя эта процедура применима к любому итерационному алгоритму, наиболее целесообразно использовать ее совместно с методами Гаусса — Зайделя и последовательной верхней релаксации. Эту процедуру можно с равным успехом применять как к строкам, так и к столбцам. Проиллюстрируем ее на примере пятиточечной разностной схемы решения уравнения Лапласа с граничными условиями Дирихле в квадратной области. Для большей общности рассмотрим случай, когда шаг Δx не обязательно равен Δy . Обозначая через $\beta = \Delta x/\Delta y$ отношение шагов разностной сетки, запишем разностные уравнения для решения методом Гаусса — Зайделя¹⁾

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + \beta^2 (u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1})}{2(1 + \beta^2)}, \quad (4.123)$$

здесь k — номер итерации, i — столбец, а j — строка. Если мы решим начинать вычисления с нижней границы квадрата и двигаться вверх по строкам, то в произвольной точке сможем написать соотношение

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i+1,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + \beta^2 (u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1})}{2(1 + \beta^2)}. \quad (4.124)$$

Если посмотреть внимательно на это соотношение, то можно заметить, что в него входят лишь три неизвестных, так как величина $u_{i,j-1}^{k+1}$ уже известна либо из условий на нижней границе, если уравнение записано для первой строки, либо из решения, уже полученного на $(k+1)$ -й итерации для ниже расположенной строки. В последнее соотношение входит значение неизвестной $u_{i,j+1}$ на итерации с номером k , а не $(k+1)$, так как нашей задачей было получить уравнение с тремя неизвестными, чтобы для решения системы уравнений можно было использовать эффективный метод прогонки. Схематически описанный алгоритм показан на рис. 4.22.

Задача сводится теперь к решению системы $I-2$ линейных уравнений с $I-2$ неизвестными значениями $u_{i,j}$ на $(k+1)$ -й итерации. Прежде чем перейти к следующей строке, можно применить метод последовательной верхней релаксации так же, как это было сделано в предыдущем разделе. Существует несколько способов включения верхней релаксации в рассматриваемый алгоритм. Первый из них состоит в том, что после решения методом прогонки системы уравнений (4.124) для каждой

¹⁾ В связи с последним членом в числителе заметим, что в общем случае хотя бы одна неизвестная в каждом уравнении должна быть уже вычислена на $(k+1)$ -м слое.

строки значения всех неизвестных в этой строке корректируются по формуле (4.122), после чего осуществляется переход к решению для следующей строки.

Другой способ состоит во включении параметра релаксации ω в алгоритм до решения уравнений прогонкой. Для этого подставим правую часть (4.124) в правую часть (4.122). В результате получим систему уравнений

$$u_{i,j}^{k+1} = (1 - \omega)u_{i,j}^k + \frac{\omega}{2(1 + \beta^2)} [u_{i+1,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + \beta^2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k)],$$

которая для каждой строки решается методом прогонки. При таком подходе последовательная верхняя релаксация органи-

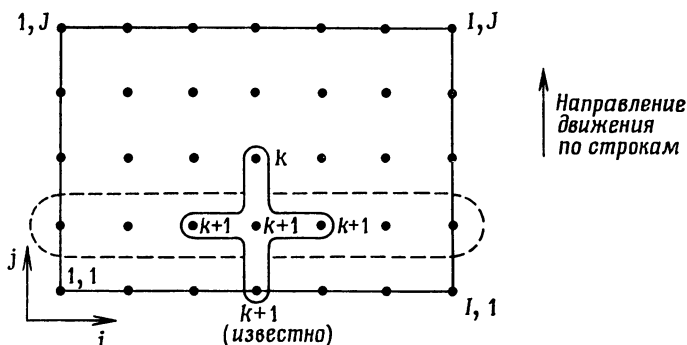


Рис. 4.22. Последовательная верхняя релаксация по строкам. К ряду, обведенному штриховой линией, применить метод прогонки, после чего перейти к следующей строке.

чески включается в алгоритм решения на каждой строке, а не является отдельным шагом процедуры решения. Так как при использовании прогонки желательно обеспечить диагональное преобладание, то при втором способе включения верхней релаксации в алгоритм надо позаботиться о том, чтобы $\omega \leq 1 + \beta^2$.

При последовательной верхней релаксации по строкам один цикл итерации заканчивается после того, как системы уравнений с трехдиагональной матрицей решены для всех строк. После этого процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости итераций. Эймс [Ames, 1977] показал, что при решении задачи Дирихле рассматриваемым методом требуется в $\sqrt{2}$ раз меньше итераций, чем при решении той же задачи методом Гаусса — Зейделя с последовательной верхней релаксацией (для одинакового уменьшения начальной ошибки). С другой стороны, применение метода прогонки ведет к некоторому увеличению времени расчета одной итерации.

Ускорение сходимости итераций при использовании блочных итерационных методов по сравнению с точечно-итерационными методами связано, по-видимому, с более сильным влиянием граничных условий на каждой итерации. Например, при последовательной верхней релаксации по строкам значения неизвестных определяются сразу во всей строке, поэтому на каждой итерации граничные условия могут влиять на значения сразу всех неизвестных в строке. Совсем иная картина наблюдается при решении разностных уравнений, получаемых при применении точечно-итерационной схемы, методом Гаусса — Зайделя, так как существует хотя бы одна граничная точка (какая именно, зависит от выбранной последовательности прохождения точек), которая на первой итерации влияет на решение лишь в соседних с ней точках.

Неявный метод переменных направлений. При последовательной верхней релаксации по строкам строки перебираются одна за другой, и эта процедура все время повторяется. Сходимость метода часто можно улучшить, чередуя движение по строкам и движение по столбцам. Тогда одна итерация будет состоять в последовательном прохождении сначала всех строк, а потом всех столбцов. Известно несколько очень похожих друг на друга вариантов неявного метода переменных направлений. Простейшей процедурой является применение сначала соотношения (4.124) для движения по строкам. Определенные таким образом величины будем обозначать индексом $k + 1/2$. После этого в соответствии с формулой

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i+1,j}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1} + \beta^2 (u_{i,j+1}^{k+1} + u_{i,j}^{k+1})}{2(1 + \beta^2)}$$

проводится релаксация по столбцам. Так завершается одна итерация, а верхняя релаксация проводится во всех узлах сетки по формуле (4.122) в качестве второго шага перед второй итерацией. Верхняя релаксация может быть и сразу включена в алгоритм расчета, если итерации по строкам проводить в соответствии с формулами

$$u_{i,j}^{k+1/2} = (1 - \omega) u_{i,j}^k + \frac{\omega}{2(1 + \beta^2)} [u_{i+1,j}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2} + \beta^2 (u_{i,j+1}^{k+1/2} + u_{i,j-1}^{k+1/2})], \quad (4.125a)$$

а по столбцам — в соответствии с формулами

$$u_{i,j}^{k+1} = (1 - \omega) u_{i,j}^{k+1/2} + \frac{\omega}{2(1 + \beta^2)} [u_{i+1,j}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2} + \beta^2 (u_{i,j+1}^{k+1} + u_{i,j}^{k+1})], \quad (4.125b)$$

Для обеспечения диагонального преобладания в методе прогонки требуется, чтобы $\omega \leq 1 + \beta^2$ при проведении итераций по строкам и $\omega \leq (1 + \beta^2)/\beta^2$ при проведении итераций по столбцам.

Разностные схемы, получающиеся при применении неявных методов переменных направлений для решения двумерного уравнения теплопроводности (4.97), также довольно часто используются для решения уравнения Лапласа. Возможность применения такого подхода объясняется тем, что если в описываемой уравнением (4.97) нестационарной задаче граничные условия не зависят от времени, то решение асимптотически стремится к стационарному решению, удовлетворяющему уравнению Лапласа. Так как нас интересует лишь *стационарное* решение, то размер шага по времени можно выбрать, исходя из условий наиболее быстрой сходимости итерационного процесса. Положив в соотношениях (4.103) $\alpha\Delta t/2 = \rho_k$, запишем двухшаговую неявную схему Писмена — Ракфорда для решения уравнения Лапласа:

Шаг 1

$$u_{i,j}^{k+1/2} = u_{i,j}^k + \rho_k (\delta_x^2 u_{i,j}^{k+1/2} + \delta_y^2 u_{i,j}^k). \quad (4.126a)$$

Шаг 2

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^{k+1/2} + \rho_k (\delta_x^2 u_{i,j}^{k+1/2} + \delta_y^2 u_{i,j}^{k+1}). \quad (4.126b)$$

Разностные операторы δ_x^2 и δ_y^2 определены соотношениями (4.100).

На шаге 1 проводится прогонка по строкам, а на шаге 2 — прогонка по столбцам. Коэффициенты ρ_k называются *итерационными параметрами*. Митчелл и Гриффитс [Mitchell, Griffiths, 1980] показали, что при решении уравнения Лапласа в квадратной области итерационный процесс Писмена — Ракфорда сходится для любых фиксированных значений ρ_k . С другой стороны, наибольшая вычислительная эффективность алгоритма достигается в тех случаях, когда итерационные параметры изменяются вместе с k , а в течение одной итерации коэффициенты ρ_k должны быть одинаковы на обоих шагах итерации. Ключевым моментом, определяющим эффективность применения неявного метода переменных направлений для решения эллиптических уравнений, является выбор значений итерационных параметров ρ_k . Этот выбор можно осуществлять либо по методике, предложенной Писменом и Ракфордом [Peaceman, Rachford, 1955], либо по методике, предложенной Вахспрессом [Wachspress, 1966]. Хотя имеющийся опыт применения этих методик не позволяет узнать, какая из них лучше, результаты некоторых исследований указывают на то, что вторая из них предпочтительней. Читателю, который захочет воспользоваться

неявным методом переменных направлений, мы советуем сначала ознакомиться с работами, посвященными выбору итерационных параметров ρ_k .

Сопоставить времена счета при использовании точечно- и блочно-итерационных методов с последовательной верхней релаксацией не просто из-за сложности подбора оптимального значения параметра верхней релаксации. Кроме того, результат такого сопоставления во многом определяется конкретными особенностями рассматриваемой задачи, граничными условиями и числом узлов разностной сетки. Блочно-итерационные методы требуют обычно меньше итераций, чем точечно-итерационные методы, но, как мы уже указывали, на каждой итерации приходится проводить больший объем вычислений. Имеющийся опыт показывает, что для большинства задач время счета для достижения одинаковой точности при применении методов последовательной верхней релаксации по строкам и Гаусса — Зайделя с последовательной верхней релаксацией практически одинаково. Неявный метод переменных направлений с последовательной верхней релаксацией (при постоянном параметре итераций) позволяет часто сократить время счета на 20—40 % по сравнению с методом Гаусса — Зайделя с последовательной верхней релаксацией. При переменном параметре итераций можно обычно достичь еще большего сокращения времени счета.

Сильно неявные методы. В последние годы разработан новый тип блочно-итерационной процедуры решения системы алгебраических уравнений, возникающей при дискретизации эллиптических уравнений в частных производных. Для иллюстрации этого подхода рассмотрим систему алгебраических уравнений, получающуюся при использовании пятиточечной схемы для решения уравнения Лапласа. Запишем эту систему уравнений в виде

$$[A] \mathbf{u} = \mathbf{C},$$

где $[A]$ — сильно разреженная матрица коэффициентов, \mathbf{u} — вектор-столбец неизвестных, а \mathbf{C} — вектор-столбец известных величин. Стоун [Stone, 1968] предложил решать эту систему уравнений методом факторизации с использованием сильно разреженной процедуры. Суть этого метода состоит в замене разреженной матрицы $[A]$ матрицей $[A + P]$, которая представляется в виде произведения верхней $[U]$ и нижней $[L]$ разреженных треугольных матриц. Если матрицы $[L]$ и $[U]$ неразреженные, то эффективность рассматриваемого метода оказывается близкой к эффективности метода исключения Гаусса; следовательно, успех применения метода факторизации определяется выбором мат-

рицы $[P]$. Важно, чтобы элементы этой матрицы были малы по абсолютной величине, а получающаяся в результате система уравнений должна быть более неявной, чем при использовании метода переменных направлений. Для построения итерационного алгоритма перепишем систему уравнений $[A]\mathbf{u} = \mathbf{C}$ в виде

$$[A + P]\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{C} + [P]\mathbf{u}^n.$$

Представим матрицу $[B] = [A + P]$ как произведение верхней $[U]$ и нижней $[L]$ треугольных матриц. Тогда

$$[L][U]\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{C} + [P]\mathbf{u}^n.$$

Если ввести промежуточный вектор $\mathbf{V}^{n+1} = [U]\mathbf{u}^{n+1}$, то получим следующий двухшаговый алгоритм:

Шаг 1

$$[L]\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{C} + [P]\mathbf{u}^n. \quad (4.127a)$$

Шаг 2

$$[U]\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{V}^{n+1}. \quad (4.127b)$$

По этому алгоритму расчет проводится на каждой итерации. На шаге 1 осуществляется прямая подстановка, а на шаге 2 — обратная.

Стоун [Stone, 1968] выбрал матрицу $[P]$ таким образом, чтобы в матрицах $[L]$ и $[U]$ было только по три ненулевые диагонали, а главная диагональ матрицы $[U]$ состояла бы из одних единиц. Кроме того, элементы матриц $[L]$ и $[U]$ были подобраны так, что ненулевые элементы матрицы $[A]$ совпали с расположенными на их месте элементами матрицы $[B]$, т. е. матрица $[B]$ отличалась от матрицы $[A]$ появлением двух новых ненулевых диагоналей. Элементы матриц $[L]$, $[U]$ и $[P]$ можно определить по заданным уравнениям, основываясь на произведении $[L][U]$. Подробно этот метод описан Стоуном [Stone, 1968]. Рассмотренный метод неявный как по x , так и по y . Проведенные численные расчеты показали, что время решения уравнения Лапласа этим методом составляет лишь 50—60 % времени решения неявным методом переменных направлений.

Шнейдер и Зедан [Schneider, Zedan, 1981] предложили новый способ построения матриц $[L]$ и $[U]$, позволяющий сократить время расчета в два—четыре раза по сравнению с методом Стоуна (Stone, 1968). Получившийся в результате метод авторы назвали *модифицированным сильно неявным методом*. Алгоритм решения уравнений этим методом также описывается соотношениями (4.127a) и (4.127b); улучшение же достигнуто благодаря распространению метода Стоуна на девятиточечную схему

решения уравнения Лапласа. Модифицированный сильно неявный метод можно использовать и для решения разностных уравнений, получающихся при применении пятиточечной схемы, при этом, как уже отмечалось, время расчета сокращается в два — четыре раза. По-видимому, новый метод является эффективным и довольно общим методом решения алгебраических уравнений. Подробно он описан в приложении С.

§ 4.4. Уравнение Бюргерса (невязкое течение)

Мы изучили различные конечно-разностные методы и применили их к решению простых линейных задач. Это позволило нам лучше понять эти методы и познакомиться с их основными специфическими особенностями. К сожалению, в гидромеханике обычно приходится решать нелинейные задачи, так как давление, плотность, температура и скорость должны быть определены из решения нелинейной системы уравнений в частных производных.

Полезно сначала изучить какое-то одно простое нелинейное уравнение, аналогичное уравнениям гидромеханики. Это уравнение должно включать в себя члены, описывающие те же физические процессы, что и члены, входящие в уравнение гидромеханики, т. е. конвективный, диффузионный или диссипативный и нестационарный члены. Такое простое нелинейное уравнение было предложено Бюргерсом [Burgers, 1948]. Оно имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.128)$$

Первое и второе слагаемые в левой части этого уравнения являются соответственно нестационарным и конвективным членами, а в правой части стоит вязкий член. Если вязкий член не равен нулю, то уравнение (4.128) параболическое; если же он равен нулю, то в уравнении остаются лишь нестационарный и нелинейный конвективный члены. Такое уравнение гиперболическое и имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.129)$$

Его можно рассматривать как модельное для уравнений Эйлера, описывающих движение идеального газа. Уравнение (4.129) есть нелинейное уравнение конвекции и обладает некоторыми математическими особенностями, к рассмотрению которых мы сейчас перейдем. После этого мы опишем различные разностные схемы, используемые для решения невязкого уравнения Бюргерса. При этом будут приведены типичные результаты, полу-

чаемые при расчетах по многим широко используемым разностным схемам, и выяснена роль нелинейных членов. Уравнение Бюргера будет рассмотрено в § 4.5.

Уравнение (4.129) можно интерпретировать и как нелинейное волновое уравнение, при этом скорость распространения волны в различных точках будет разной. В противоположность этому в ранее изученном линейном одномерном уравнении конвекции (линейном волновом уравнении) (4.2) скорость распространения любых возмущений была постоянна. Так как скорость распространения возмущений меняется, то характеристики начинают пересекаться и в решении возникают разрывы, аналогичные ударным волнам в газовой динамике. Следовательно, рассматриваемое одномерное модельное уравнение позволяет изучать свойства разрывных решений.

Нелинейные гиперболические уравнения в частных производных обладают решениями двух типов согласно Лаксу [Lax, 1954]. Поясним это на примере простого скалярного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (4.130)$$

В общем случае и неизвестная u , и функция $F(u)$ — векторы. Перепишем уравнение (4.130) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.131)$$

где в общем случае $A = A(u)$ — матрица Якоби $\partial F_i / \partial u_j$, а в нашем простом примере $A = dF/du$. Так как наше уравнение (или система уравнений) в частных производных гиперболическое, то все собственные значения матрицы A вещественные. *Гладким* называется такое решение уравнения (4.131), когда функция u непрерывна внутри области, а ее производная может иметь разрыв на границе (т. е. решение уравнения является непрерывным по Липшицу). *Слабым* называется решение уравнения (4.131) гладкое всюду, кроме некоторой поверхности в пространстве (x, t) , на которой функция u может иметь разрыв. На величину скачка функции u при переходе через поверхность разрыва накладываются определенные ограничения. Пусть ω — произвольная непрерывная векторная функция с непрерывной первой производной, равная нулю вне некоторой ограниченной области, тогда u называется слабым решением уравнения (4.130), если

$$\iint_D (\omega_t u + \omega_x F) dx dt + \int \omega(x, 0) \phi(x) dx = 0, \quad (4.132)$$

причем $\phi(x) = u(x, 0)$. Гладкое решение всегда является одновременно слабым решением, а всякое непрерывное слабое

решение является гладким. Подробно теория слабых решений изложена в прекрасных книгах [Whitham, 1974] и [Jeffrey, Taniuti, 1964]. Теория слабых решений гиперболических уравнений в частных производных — относительно недавно созданная математическая теория. Одним из примеров слабого решения являются ударные волны, возникающие в сверхзвуковых течениях невязкой жидкости. Интересно заметить, что решения уравнений газовой динамики с ударными волнами были известны за 50—100 лет до того, как была построена теория слабых решений систем гиперболических уравнений в частных производных.

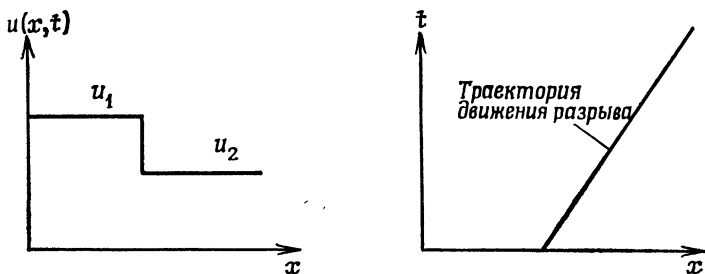


Рис. 4.23. Типичная задача о распространении разрыва для уравнений Бюргера.

Вернемся к невязкому уравнению Бюргера и найдем условия существования слабого решения этого уравнения, т. е. необходимые условия существования решения с разрывом, как изображено на рис. 4.23.

Пусть $w(x, t)$ — произвольная непрерывная функция, имеющая непрерывную первую производную. Кроме того, пусть она обращается в нуль на границе B области D и вне D (на дополнении к D); D — произвольная прямоугольная область в плоскости (x, t) . Ясно, что в этом случае

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) w(x, t) dx dt = 0, \quad (4.133)$$

или

$$\iint_D (uw_t + Fw_x) dx dt = 0. \quad (4.134)$$

Если функции u и F непрерывны и имеют непрерывные первые производные, то уравнения (4.133) и (4.134) эквивалентны. Входящий в уравнение (4.132) второй интеграл в последних двух уравнениях отсутствует, так как функция w на границе равна нулю. Функция $u(x, t)$, удовлетворяющая условию (4.134) для

любой функции w , называется слабым решением невязкого уравнения Бюргерса. Отметим, что, для того чтобы удовлетворить условию (4.134), функция u не обязательно должна быть дифференцируемой.

Рассмотрим случай, когда прямоугольная область D в плоскости (x, t) разделена кривой $\tau(x, t) = 0$, на которой функция u имеет разрыв. Предположим, что функция u непрерывна и имеет непрерывные первые производные в подобластях, лежа-

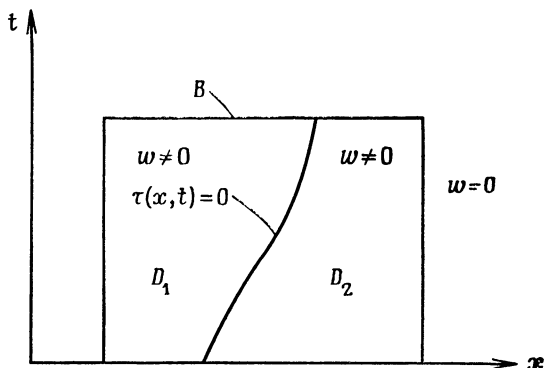


Рис. 4.24. Схематическое изображение произвольной области с расположенным в ней разрывом.

щих слева от $\tau(D_1)$ и справа от $\tau(D_2)$. Используя формулы интегрирования по частям и учитывая, что функция u равна нулю на границе области D и вне D , из (4.134) получим

$$\iint_{D_1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) w \, dx \, dt + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) w \, dx \, dt + \int_{\tau} ([u] \cos \alpha_1 + [F] \cos \alpha_2) \, ds = 0. \quad (4.135)$$

Последний интеграл вычисляется вдоль кривой $\tau(x, t) = 0$, разделяющей подобласти D_1 и D_2 . Он появляется при интегрировании по частям вследствие того, что кривая $\tau(x, t) = 0$ является границей подобластей D_1 и D_2 . Квадратными скобками обозначена разность значений заключенной в них величины по разные стороны разрыва («скачок» этой величины при переходе через разрыв), α_1 и α_2 — углы между направлением нормали к кривой $\tau(x, t) = 0$ и осями t и x соответственно. Рассматриваемая задача проиллюстрирована на рис. 4.24.

Согласно (4.133), входящие в (4.135) интегралы по подобластям D_1 и D_2 равны нулю, поэтому и последний интеграл равен

нулю для любой функции w . Следовательно,

$$[u] \cos \alpha_1 + [F] \cos \alpha_2 = 0. \quad (4.136)$$

Последнее соотношение и является условием, которому должно удовлетворять слабое решение u уравнения Бюргерса. Рассмотрим движущийся разрыв. Пусть начальное распределение $u(x, 0)$ имеет вид, показанный на рис. 4.23, где u_1 и u_2 — значения u слева и справа от разрыва. В одномерном случае уравнение поверхности $\tau(x, t) = 0$ можно представить в виде $t - t_1(x) = 0$. Тогда входящие в (4.136) направляющие косинусы определяются соотношениями

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{[1 + t_1'^2]^{1/2}}, \quad \cos \alpha_2 = - \frac{t_1'}{[1 + t_1'^2]^{1/2}}$$

(штрихом обозначено дифференцирование по x). Следовательно,

$$\frac{[u]}{[1 + t_1'^2]^{1/2}} - \frac{[F] t_1'}{[1 + t_1'^2]^{1/2}} = 0,$$

или

$$u_2 - u_1 = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \frac{dt}{dx}.$$

Окончательно

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad (4.137)$$

т. е. скорость распространения разрыва равна полусумме скоростей слева и справа от него. Зная, что по обе стороны разрыва скорости постоянны и что сам он движется с постоянной скоростью $(u_1 + u_2)/2$, легко провести сравнение решений по различным численным методам расчета течений с разрывами с точным решением.

Волны разрежения встречаются в сверхзвуковых течениях реже, чем ударные волны. Известно точное решение уравнения Бюргерса, описывающее волну разрежения. Пусть начальное распределение $u(x, 0)$ имеет вид, изображенный на рис. 4.25. Характеристики уравнения Бюргерса описываются соотношением

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}. \quad (4.138)$$

Вид характеристик в плоскости (x, t) показан на рис. 4.26. В левой полуплоскости характеристики суть вертикальные прямые, а справа от характеристики, ограничивающей волны разрежения, они составляют с осью x угол $\pi/4$ рад. Рассматриваем

мая задача похожа на задачу о распространении централизованной волны разрежения в течении сжимаемой жидкости. В случае уравнения Бюргера волна разрежения ограничена слева линией $x = 0$, а справа — проходящей через начало координат характеристикой, которая изображена на рисунке штриховой ли-

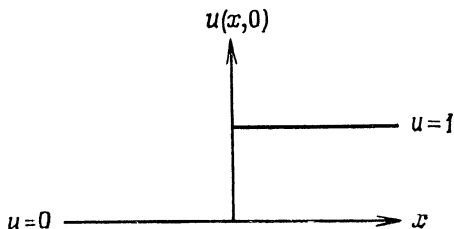


Рис. 4.25. Начальные условия для волны разрежения.

ней. Математически решение задачи о распространении волны разрежения можно записать в виде

$$\begin{aligned} u &= 0, & x &\leq 0, \\ u &= x/t, & 0 < x < t, \\ u &= 1, & x &\geq t. \end{aligned}$$

Итак, заданное начальное распределение u приводит к образованию централизованной волны разрежения, ширина которой растет по времени линейно.

Мы изучили две задачи, часто встречающиеся в сверхзвуковых газодинамических течениях — ударные волны и волны разрежения, — которые можно моделировать при помощи уравнения Бюргера. Решения такого типа существуют и для других нелинейных гиперболических уравнений в частных производных. Вооружившись простыми аналитическими решениями для двух этих важных случаев, перейдем к изучению различных разностных схем решения невязкого уравнения Бюргера.

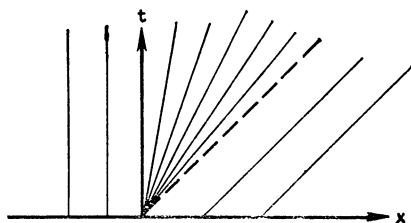


Рис. 4.26. Характеристики для случая централизованной волны разрежения.

4.4.1. Метод Лакса

Схемы первого порядка точности почти не используются для решения гиперболических уравнений в частных производных. Метод Лакса [Lax, 1954] выбран как типичный метод первого

порядка точности для того, чтобы показать, что такие методы позволяют решать нелинейные уравнения, но обладают сильными диссипативными свойствами.

Для построения разностной схемы, как и при построении всех последующих примеров, воспользуемся дивергентной формой записи исходного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Применим метод Лакса. Для этого выпишем первые два члена ряда Тейлора для функции u в точке (x, t) :

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x, t} + \dots$$

При помощи исходного уравнения заменим производную по времени; тогда запишем

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x, t} + \dots$$

Следуя методу Лакса, для аппроксимации производной используем центральные разности, а первое слагаемое в правой части представим как среднее арифметическое значение в двух соседних узлах (см. п. 4.1.3). В результате получим

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2}. \quad (4.139)$$

Для уравнения Бюргера $F = u^2/2$. Коэффициент перехода в этом случае запишется в виде

$$G = \cos \beta - i \frac{\Delta t}{\Delta x} A \sin \beta, \quad (4.140)$$

где якобиан $A = dF/du$ для уравнения Бюргера равен просто u . Условие устойчивости схемы Лакса имеет вид

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{\max} \right| \leq 1, \quad (4.141)$$

так как u_{\max} — максимальное собственное значение матрицы A , состоящей лишь из одного элемента u .

Результаты расчета методом Лакса движущегося вправо разрыва 1—0 приведены на рис. 4.27. Положение движущегося разрыва определяется довольно точно, однако диссипативные свойства метода проявляются в размазывании разрыва на несколько шагов разностной сетки. Как уже отмечалось раньше, это размазывание должно быть тем больше, чем меньше число Куранта. Интересно заметить, что при расчете разрывных ре-

шений метод Лакса приводит к одинаковым значениям u в двух соседних узлах, как показано на рисунке. Укажем еще на одно свойство метода Лакса — его монотонность, т. е. на отсутствие осцилляций решения. С. К. Годунов [1959] показал, что схемы с более высоким, чем первый, порядком точности не могут быть монотонными¹⁾. Если расчет разрыва является лишь частью более общей задачи, то желательно проводить его, используя мо-

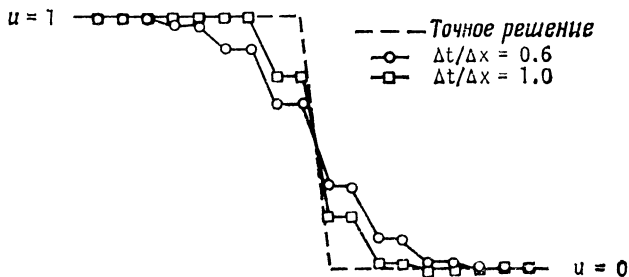


Рис. 4.27. Результаты численного решения уравнения Бюргерса по схеме Лакса.

нотонную схему, однако диссипативные свойства методов первого порядка точности велики, поэтому вопрос о целесообразности использования монотонной схемы необходимо решать в каждом конкретном случае.

4.4.2. Метод Лакса — Вендроффа

Метод Лакса — Вендроффа [Lax, Wendroff, 1960] — один из первых конечно-разностных методов второго порядка точности, созданных для решения гиперболических уравнений в частных производных. Для нелинейных уравнений разностную схему можно построить, исходя из разложения в ряд Тейлора:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x, t} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x, t} + \dots$$

Первую производную по времени можно заменить при помощи исходного уравнения в частных производных. Сложнее обстоит дело со второй производной. Запишем исходное уравнение в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial x}.$$

¹⁾ Все результаты были получены С. К. Годуновым лишь для так называемых однородных разностных схем. В последние годы создан ряд неоднородных монотонных разностных схем высокого порядка точности для решения гиперболических уравнений. Они описаны, например, в работах [2, 3, 11, 15, 27, 31] в списке дополнительной литературы на стр. 712. — *Прим. перев.*

Дифференцируя его по времени, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right),$$

где порядок дифференцирования функции F изменен. Так как $F = F(u)$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -A \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Следовательно, производную $\partial F/\partial t$ можно заменить по формуле

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -A \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial F}{\partial x} \right).$$

В случае уравнения Бюргера матрица Якоби A состоит лишь из одного элемента. Если решается система уравнений, то u и F — векторы, а A — матрица. Подставляя найденные производные в разложение функции u в ряд Тейлора, получаем

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - \Delta t \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \dots$$

Для построения схемы Лакса — Вендроффа теперь достаточно вместо производных подставить их центрально-разностные аппроксимации

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 [A_{j+1/2}^n (F_{j+1}^n - F_j^n) - A_{j-1/2}^n (F_j^n - F_{j-1}^n)]. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Матрица Якоби A вычисляется в середине между узлами разностной сетки, т. е.

$$A_{j+1/2} = A \left(\frac{u_j + u_{j+1}}{2} \right).$$

Если решается уравнение Бюргера, то $F = u^2/2$ и $A = u$. В этом случае $A_{j+1/2} = (u_j + u_{j+1})/2$, $A_{j-1/2} = (u_j + u_{j-1})/2$. Коэффициент перехода для рассматриваемого метода вычисляется по формуле

$$G = 1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} A \right)^2 (1 - \cos \beta) - 2i \frac{\Delta t}{\Delta x} A \sin \beta, \quad (4.143)$$

а условие устойчивости имеет вид $|(\Delta t/\Delta x) u_{\max}| \leq 1$.

На рис. 4.28 показаны результаты расчета методом Лакса — Вендроффа той же модельной задачи, что и в предыдущем разделе. Положение движущегося вправо разрыва определяется достаточно точно, а сам разрыв описывается довольно крутой линией. Осцилляции решения вблизи разрыва подчеркивают преимущественно дисперсионные свойства разностной схемы. Хотя для аппроксимации производных используются центральные разности, решение асимметрично, так как разрыв движется. При

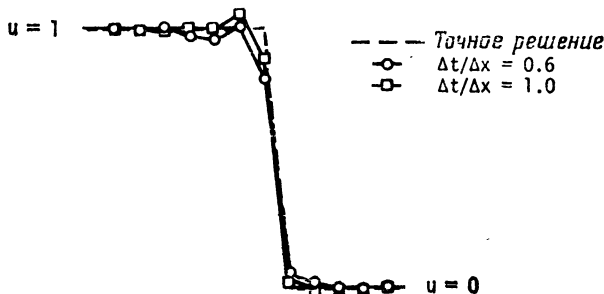


Рис. 4.28. Решение невязкого уравнения Бюргера, полученное схемой Лакса — Вендроффа.

числе Куранта, равном 0.6, наблюдаются более сильные осцилляции решения, чем при числе Куранта, равном 1. Обычно при уменьшении числа Куранта ухудшается качество численного решения (см. п. 4.1.6).

4.4.3. Метод Мак-Кормака

В п. 4.1.8 было показано, что метод Мак-Кормака является модификацией метода Лакса — Вендроффа на основе схемы предиктор-корректор. Этот метод намного проще метода Лакса — Вендроффа, так как в разностные уравнения не входит матрица Якоби.

Для уравнения Бюргера невязкого течения схема Мак-Кормака имеет вид

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n), \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[u_j^n + u_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_j^{n+1} - F_{j-1}^{n+1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.144)$$

Коэффициент перехода и условие устойчивости в этом случае такие же, как в схеме Лакса — Вендроффа. Результаты расчета движущегося вправо разрыва методом Мак-Кормака показаны на рис. 4.29. Положение разрыва определяется довольно точно.

Результаты расчета отличаются от полученных методом Лакса—Вендроффа при тех же числах Куранта. Это является следствием как изменения направления численного дифференцирования на шагах предиктор и корректор, так и следствием нелинейности рассматриваемого уравнения в частных производных. Нет ничего удивительного в том, что разные результаты получаются методами, которые для линейных задач эквивалентны.

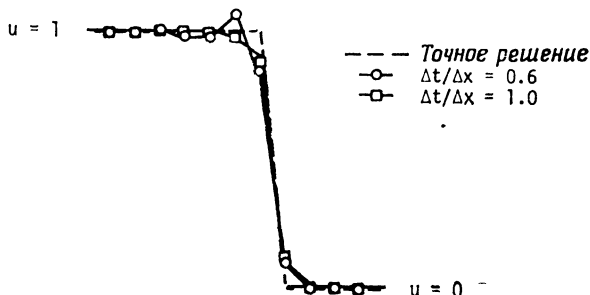


Рис. 4.29. Решение уравнения Бюргерса, полученное схемой Мак-Кормака.

Обычно схема Мак-Кормака очень хорошо описывает разрывы. Отметим, между прочим, что изменение направления численного дифференцирования на шагах предиктор и корректор приведет к изменению результатов расчета. Лучше всего рассчитываются разрывы, если на шаге предиктор разности берутся в направлении движения разрыва. Мы предложим читателю проверить это в задачах, которые помещены в конце главы.

4.4.4. Метод Русанова или Бёрстейна — Мирина

Имеющий третий порядок точности метод Русанова или Бёрстейна—Мирина рассмотрен в п. 4.1.11. В этом методе для аппроксимации производных используются центральные разности. Применяя его к уравнению (4.130), получаем разностную схему

$$\begin{aligned}
 u_{j+1/2}^{(1)} &= \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{1}{3} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n), \\
 u_j^{(2)} &= u_j^n - \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{(1)} - F_{j-1/2}^{(1)}), \\
 u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{1}{24} \frac{\Delta t}{\Delta x} (-2F_{j+2}^n + 7F_{j+1}^n - 7F_{j-1}^n + 2F_{j-2}^n) - \\
 &\quad - \frac{3}{8} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^{(2)} - F_{j-1}^{(2)}) - \\
 &\quad - \frac{\omega}{24} (u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n). \quad (4.145)
 \end{aligned}$$

Последний член в соотношении, описывающем третий шаг, является конечно-разностной аппроксимацией члена с четвертой производной $(\Delta x)^4 \partial^4 u / \partial x^4$, дополнительно вводимого в уравнение для обеспечения устойчивости схемы. Введение этого члена не снижает третий порядок точности схемы, так как он имеет порядок $O((\Delta x)^4)$. Из анализа устойчивости рассматриваемого

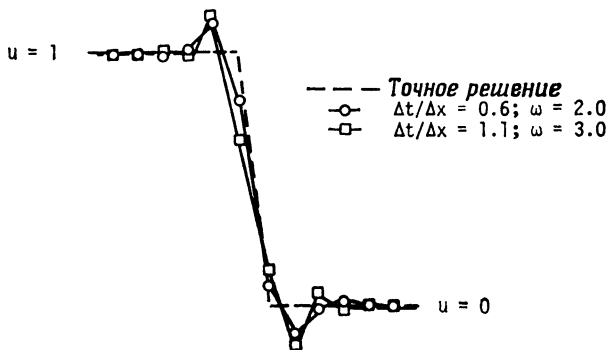


Рис. 4.30. Решение уравнения Бюргера, полученное схемой Русанова.

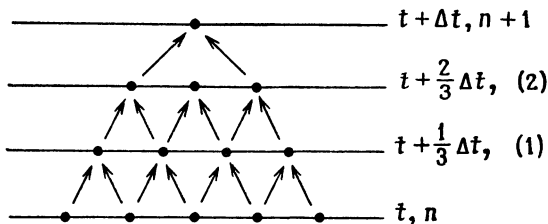


Рис. 4.31. Пирамида узлов сетки для схемы Русанова.

метода следует, что коэффициент перехода выражается формулой

$$G = 1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} u \right)^2 \frac{\sin^2 \beta}{2} - \frac{\omega}{6} (1 - \cos \beta) + i \frac{\Delta t}{\Delta x} u \sin \beta \times \left\{ 1 + \frac{1}{3} (1 - \cos \beta) \left[1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} u \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.146)$$

В случае уравнения Бюргера эта схема устойчива, если

$$|v| \leq 1 \quad \text{или} \quad \left| \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{\max} \right| \leq 1$$

и

$$4v^2 - v^4 \leq \omega \leq 3. \quad (4.147)$$

На рис. 4.30 показаны результаты расчета по этой схеме решения уравнения Бюргера с движущимся вправо разрывом.

Положение разрыва и его интенсивность описываются корректно, однако перед и за разрывом наблюдается превышение точных значений. На рис. 4.31 схематически показано, как при использовании метода Русанова происходит движение по точкам шаблона при переходе с одного слоя на другой.

4.4.5. Метод Уорминга — Катлера — Ломакса

Уорминг и др. [Warming et al., 1973] предложили метод построения разностной схемы третьего порядка точности без использования центральных разностей. Первые два шага этого метода совпадают с методом Мак-Кормака при шаге $(2/3)\Delta t$. Основное преимущество такого метода перед методом Русанова состоит в том, что он использует значения всех величин лишь в узловых точках.

Применяя метод Уорминга — Катлера — Ломакса, получаем разностную схему

$$\begin{aligned} u_j^{(1)} &= u_j^n - \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n), \\ u_j^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[u_j^n + u_j^{(1)} - \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_j^{(1)} - F_{j-1}^{(1)}) \right], \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{1}{24} \frac{\Delta t}{\Delta x} (-2F_{j+2}^n + 7F_{j+1}^n - 7F_{j-1}^n + 2F_{j-2}^n) - \\ &\quad - \frac{3}{8} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^{(2)} - F_{j-1}^{(2)}) - \\ &\quad - \frac{\omega}{24} (u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n). \end{aligned} \quad (4.148)$$

Третий шаг метода Уорминга — Катлера — Ломакса совпадает с третьим шагом метода Русанова. Отметим, что на первых двух шагах можно использовать и другой метод второго порядка точности. Бёрстейн и Мирин показали, что для вычисления $u_j^{(2)}$ можно использовать любой метод второго порядка точности. Линейный анализ устойчивости рассматриваемой разностной схемы показывает, что она устойчива при тех же условиях (4.147), при которых устойчива схема Русанова. На рис. 4.32 схематически показано, как при использовании метода Уорминга — Катлера — Ломакса происходит переход с одного слоя на другой. Отметим, что на этой диаграмме направление численного дифференцирования на первых двух шагах различно. Направление дифференцирования можно изменить, а можно и циклически менять это направление при проведении нескольких последовательных шагов по времени.

На рис. 4.33 показаны результаты расчета решения уравнения Бюргерса с движущимся вправо разрывом по схеме Уорминга — Катлера — Ломакса. Эти результаты почти не отличаются от полученных в предыдущем разделе. На основе полученных

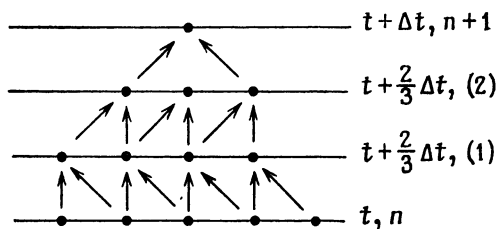


Рис. 4.32. Пирамида узлов сетки для метода Уорминга — Катлера — Ломакса.

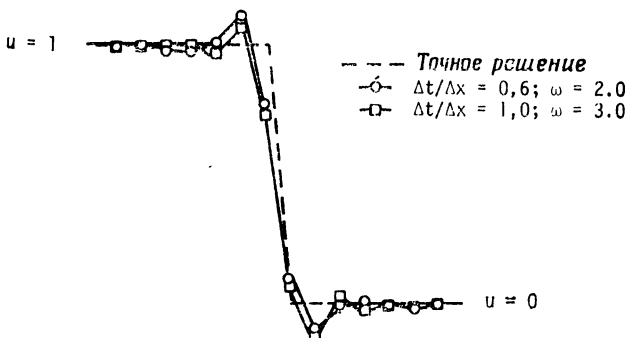


Рис. 4.33. Решение уравнения Бюргерса, полученное схемой Уорминга — Катлера — Ломакса.

результатов можно прийти к заключению, что все методы третьего порядка приводят к примерно одинаковой точности.

4.4.6. Самонастраивающийся метод третьего порядка точности

Параметр ω , появляющийся на третьем шаге в двух только что рассмотренных методах, может быть выбран относительно произвольно. Его величина ограничена лишь условиями устойчивости разностной схемы. Выбранное в начале расчета значение параметра ω остается во всех узлах сетки одним и тем же. Однако если вводимый на третьем шаге демпфирующий член записать в дивергентном виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right),$$

то при проведении расчета параметр ω может меняться от точки к точке, а законы сохранения на разностной сетке будут выполняться. При таком подходе член, содержащий ω в соотношениях для последнего шага схем Рунсана и Уорминга — Катлера — Ломакса, запишется в виде

$$-\frac{\omega_{j+1/2}^n}{24}(u_{j+2}^n - 3u_{j+1}^n + 3u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\omega_{j-1/2}^n}{24}(u_{j+1}^n - 3u_j^n + 3u_{j-1}^n - u_{j-2}^n). \quad (4.149)$$

Величины $\omega_{j \pm 1/2}^n$ зависят теперь от эффективного сеточного числа Куранта. Уорминг и др. [Warming et al., 1973] предложили в каждом узле выбирать эти параметры так, чтобы свести к минимуму либо дисперсионную, либо диссипативную ошибку.

Модифицированное уравнение для схем третьего порядка точности проанализировано в п. 4.1.11. Если мы хотим минимизировать дисперсионную ошибку, то в соответствии с (4.68) должны задать параметр $\omega_{j \pm 1/2}^n$ по формуле

$$\omega_{j \pm 1/2}^n = \frac{(4v_{j \pm 1/2}^2 + 1)(4 - v_{j \pm 1/2}^2)}{5}. \quad (4.150)$$

Теперь осталось лишь разумно определить эффективное число Куранта $v_{j \pm 1/2}$. Уорминг и др. [Warming et al., 1973] предложили при определении коэффициентов $\omega_{j \pm 1/2}$ полагать эффективное число Куранта равным среднему значению чисел Куранта в узлах сетки, используемых для разностной аппроксимации соответствующего члена. Так как член с $\omega_{j+1/2}$ содержит значение неизвестной в узлах $j+2$, $j+1$, j и $j-1$, то можно записать

$$v_{j+1/2} = \frac{1}{4}(\lambda_{j+2} + \lambda_{j+1} + \lambda_j + \lambda_{j-1}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.151)$$

и аналогично

$$v_{j-1/2} = \frac{1}{4}(\lambda_{j+1} + \lambda_j + \lambda_{j-1} + \lambda_{j-2}) \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

где λ — локальное собственное значение. Для уравнения Бюргера λ просто совпадает с неизвестной u . Результаты расчетов с переменным ω (расчетов по самонастраивающейся схеме) приведены на рис. 4.34. Из рисунка видно, что оба метода третьего порядка точности позволяют получить удовлетворительные результаты, если разностная схема строится из соображений минимальной дисперсии. Слева от разрыва наблюдается неболь-

шое превышение точного решения, справа же решение почти совпадает с точным. Мы не советуем определять параметр $\omega_{j \pm 1/2}$ из соображений минимума диссипации. Член, содержащий параметр ω , добавлен в уравнения для стабилизации решения, поэтому при уменьшении диссипации могут возникнуть проблемы с устойчивостью разностной схемы. Сильные осцилляции могут появляться даже в устойчивом решении. Отметим, что параметр

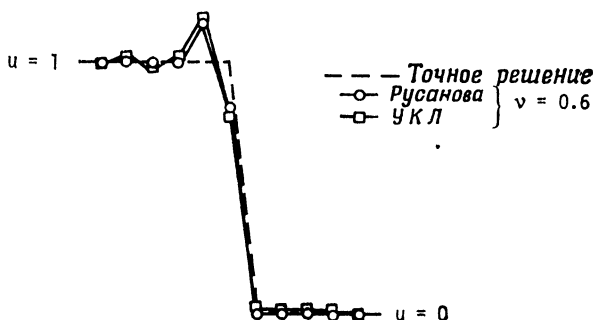


Рис. 4.34. Решение уравнения Бюргерса, полученное самоадаптирующимся методом (методом с переменным ω).

$\omega_{j \pm 1/2}$ может быть вычислен различными способами, но он должен быть выбран так, чтобы не изменилось условие устойчивости разностной схемы. Очевидно, при разных методах определения этого параметра будут получаться различные численные решения.

4.4.7 Неявные методы

Центрированный по времени неявный метод описан в п. 4.1.10. Его основу составляют соотношения (4.57). Подставляя в (4.58) производные по времени из рассматриваемого нами модельного уравнения, получаем

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^n + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{n+1} \right]. \quad (4.152)$$

Задача оказывается нелинейной, и для ее решения необходимо применить линеаризацию или итерационный метод. Бим и Уорминг [Beam, Warming, 1976] предложили воспользоваться следующим приближенным соотношением:

$$F^{n+1} \approx F^n + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^n (u^{n+1} - u^n) = F^n + A^n (u^{n+1} - u^n).$$

Тогда

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^n + \frac{\partial}{\partial x} [A(u_j^{n+1} - u_j^n)] \right\}.$$

Используя центральные разности для аппроксимации производных по x со вторым порядком точности, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta t A_{j-1}^n}{4 \Delta x} u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} + \frac{\Delta t A_{j+1}^n}{4 \Delta x} u_{j+1}^{n+1} = & -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2} - \\ & -\frac{\Delta t A_{j-1}^n}{4 \Delta x} u_{j-1}^n + u_j^n + \frac{\Delta t A_{j+1}^n}{4 \Delta x} u_{j+1}^n. \end{aligned} \quad (4.153)$$

В случае уравнения Бюргера матрица Якоби A состоит лишь из одного элемента, и поэтому правую часть можно упростить. Мы видим, что предложенная линеаризация Бима и Уорминга позволяет получить на новом временном слое систему линейных алгебраических уравнений. Это система уравнений с трехдиагональной матрицей, которая легко может быть решена прогонкой.

В п. 4.1.10 было показано, что рассматриваемый метод устойчив при любых шагах по времени. Следует заметить, что все корни характеристического уравнения лежат на единичной окружности, что согласуется с отсутствием в модифицированном уравнении членов с производными четного порядка. Вследствие этого в схему приходится вводить искусственную диссипацию. Можно, например, к уравнению (4.153) добавить член, пропорциональный разностной производной четвертого порядка

$$-\frac{\omega}{8} (u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n), \quad (4.154)$$

не изменив формального порядка аппроксимации разностной схемы. Согласно Биму и Уормингу, неявная разностная схема (4.153) с явным демпфирующим членом устойчива при

$$0 < \omega \leq 1. \quad (4.155)$$

Результаты расчета движущегося вправо разрыва по централизованной по времени неявной разностной схеме показаны на рис. 4.35. Очевидно, что решение, полученное по схеме без демпфирования, неприемлемо. При введении в разностную схему демпфирующего члена по формуле (4.154) получаются существенно лучшие результаты.

Кроме только что описанного метода, Бим и Уорминг [Beav, Warming, 1976] предложили еще два аналогичных метода — неявный метод с трехточечной аппроксимацией производных назад и неявный метод Эйлера. Вариант неявного метода Эйлера, предложенный Бимом и Уормингом, основан на методе Эйлера

с разностями назад

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+1}.$$

Для рассматриваемого нами нелинейного уравнения последнее соотношение примет вид

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{n+1}.$$

Применяя уже описанную линеаризацию, получаем

$$\begin{aligned} \frac{-\Delta t A_{j-1}^n}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} + \frac{\Delta t A_{j+1}^n}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} = & -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2} - \\ & - \frac{\Delta t A_{j-1}^n}{2\Delta x} u_{j-1}^n + u_j^n + \frac{\Delta t A_{j+1}^n}{2\Delta x} u_{j+1}^n. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Задача снова свелась к легко решаемой системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Полу-

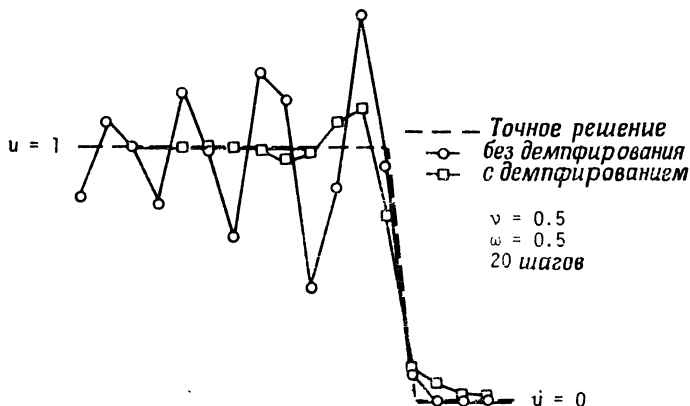


Рис. 4.35. Решение уравнения Бюргера, полученное центрированной по времени неявной схемой Бима — Уорминга.

чившаяся разностная схема безусловно устойчива, но для получения приемлемых численных результатов в нее необходимо ввести демпфирующий член, например по формуле (4.154).

Более простой вид описанных в этом разделе неявных разностных схем получается, если их записать в так называемой дельта-форме, т. е. в тех случаях, когда разностные уравнения составляются для приращений величин и для потоков, входящих в законы сохранения. Преимуществом такой записи разностных схем при решении многомерных задач является то, что

стационарное решение, если оно существует, не зависит от шага по времени. Построим центрированную по времени неявную разностную схему, используя дельта-форму записи разностных уравнений. Пусть $\Delta u_j = u_j^{n+1} - u_j^n$. Тогда уравнение (4.152) можно переписать в виде

$$\Delta u_j = -\frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^n + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{n+1} \right].$$

Проведя, как и раньше, локальную линеаризацию, получим

$$F_j^{n+1} = F_j^n + A_j^n \Delta u_j.$$

Окончательно разностное уравнение запишется в виде

$$-\frac{\Delta t A_{j-1}^n}{4 \Delta x} \Delta u_{j-1} + \Delta u_j + \frac{\Delta t A_{j+1}^n}{4 \Delta x} \Delta u_{j+1} = -\frac{\Delta t}{2 \Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n). \quad (4.157)$$

Оно имеет более простой вид, чем уравнение (4.153). Система линейных алгебраических уравнений осталась трехдиагональ-

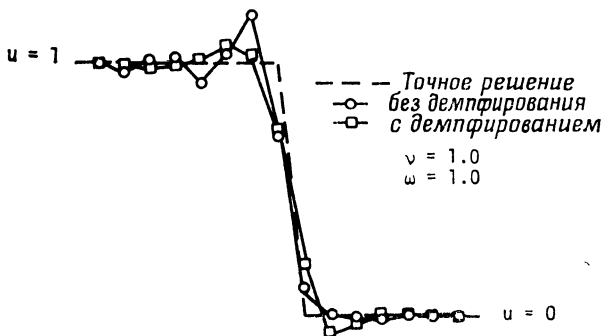


Рис. 4.36. Решение задачи о движущемся вправо разрыве, полученное центрированной по времени неявной схемой, записанной в дельта-форме.

ной, но число членов в правых частях уменьшилось. Связанное с этим сокращение объема вычислений может оказаться особенно существенным при решении систем уравнений, когда объем вычислений очень большой. Решив уравнение (4.157), найдем приращения неизвестных на одном шаге по времени. Как уже отмечалось, записанная в дельта-форме схема безусловно устойчива, но и к ней необходимо добавить демпфирующие члены более высокого порядка. На рис. 4.36 представлены результаты расчета движущегося вправо разрыва по схеме, использующей дельта-форму записи. Как и следовало ожидать, решения с демпфированием и без демпфирования идентичны ре-

шениям, полученным при развернутой записи разностных уравнений. При применении центрированной по времени схемы мы рекомендуем использовать дельта-формулу, а не развернутую запись разностных уравнений. Если ищется асимптотическое по времени решение, то члены, содержащие Δu , стремятся к нулю и, кроме того, во всех случаях необходимо вычислять меньше матричных произведений.

Рассчитанные по неявным разностным схемам решения невязкого уравнения Бюргера обычно хуже рассчитанных по явным схемам; при этом на каждом шаге приходится производить больший объем вычислений. Кроме того, часто надо знать промежуточные результаты, поэтому возможность использовать больший шаг по времени в случае неявной схемы обычно особой роли не играет. При расчете разрывных решений явные схемы позволяют получить лучшие результаты, чем неявные схемы, использующие центральные разности; поэтому мы рекомендуем для решения уравнения Бюргера для невязкого течения применять явные методы, например метод Мак-Кормака.

§ 4.5. Уравнение Бюргера (вязкое течение)

Полное нелинейное уравнение Бюргера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.158)$$

является параболическим уравнением в частных производных. Оно используется как модельное для уравнений пограничного слоя, «параболизированных» уравнений Навье — Стокса и полных уравнений Навье — Стокса. Для лучшего моделирования уравнений пограничного слоя и параболизированных уравнений Навье — Стокса независимые переменные t и x можно заменить независимыми переменными x и y ; тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.159)$$

где x — маршевая координата.

Как и в случае ранее рассмотренных модельных уравнений, для уравнения Бюргера существуют точные аналитические решения при некоторых начальных и граничных условиях. Эти решения полезно использовать для сравнения различных разностных схем. Точное стационарное решение [т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$]

уравнения (4.158) с граничными условиями

$$u(0, t) = u_0, \quad (4.160)$$

$$u(L, t) = 0 \quad (4.161)$$

имеет вид

$$u = u_0 \bar{u} \left\{ \frac{1 - \exp [\bar{u} \operatorname{Re}_L (x/L - 1)]}{1 + \exp [\bar{u} \operatorname{Re}_L (x/L - 1)]} \right\}, \quad (4.162)$$

где

$$\operatorname{Re}_L = u_0 L / \mu, \quad (4.163)$$

а \bar{u} — решение уравнения

$$(\bar{u} - 1)/(\bar{u} + 1) = \exp(-\bar{u} \operatorname{Re}_L). \quad (4.164)$$

Для простоты вместо уравнения (4.158) часто рассматривают линейное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.165)$$

Отметим, что при $\mu = 0$ из него получается волновое уравнение, а при $c = 0$ — уравнение теплопроводности. Точное стационарное решение уравнения (4.165) с граничными условиями (4.160) и (4.161) имеет вид

$$u = u_0 \left\{ \frac{1 - \exp [R_L (x/L - 1)]}{1 - \exp (-R_L)} \right\}, \quad (4.166)$$

где $R_L = cL/\mu$. Точное нестационарное решение уравнения (4.165) с начальным условием $u(x, 0) = \sin(kx)$ и периодическим граничным условием имеет вид

$$u(x, t) = \exp(-k^2 \mu t) \sin k(x - ct). \quad (4.167)$$

Это решение полезно для анализа точности расчета по времени.

Уравнения (4.158) и (4.165) можно скомбинировать в обобщенное уравнение [Rakich, 1978]

$$u_t + (c + bu)u_x = \mu u_{xx}, \quad (4.168)$$

где c и b — свободные параметры. При $b = 0$ получаем линейное уравнение Бюргерса, а при $c = 0$ и $b = 1$ — нелинейное уравнение Бюргерса. Если $c = 1/2$ и $b = -1$, то обобщенное уравнение Бюргерса имеет точное стационарное решение

$$u = -\frac{c}{b} \left[1 + \operatorname{th} \frac{c(x - x_0)}{2\mu} \right], \quad (4.169)$$

которое при $\mu = 1/4$ показано на рис. 4.37. Следовательно, если начальное распределение для u задано соотношением (4.169), то точное решение не меняется по времени, а остается равным заданному начальному распределению. Другие точные решения уравнения Бюргерса можно найти в работе [Benton, Platzman, 1972], в которой приведено 35 различных точных решений.

Уравнение (4.168) можно записать в дивергентной форме

$$u_t + \bar{F}_x = 0, \quad (4.170)$$

где \bar{F} определяется соотношением

$$\bar{F} = cu - bu^2/2 - \mu u_x. \quad (4.171)$$

Уравнение (4.168) можно записать и по-другому:

$$u_t + F_x = \mu u_{xx}, \quad (4.172)$$

где

$$F = cu + bu^2/2. \quad (4.173)$$

Для линейного случая ($b = 0$) выражение для F упрощается и

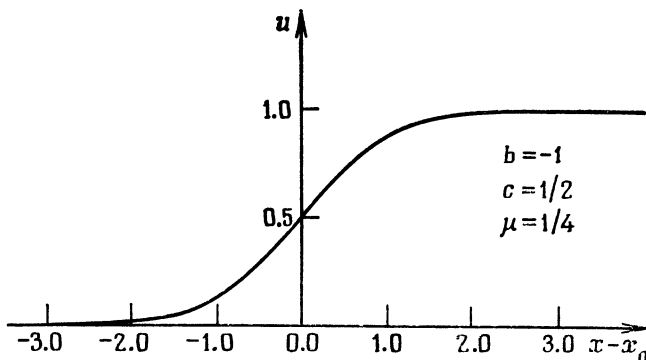


Рис. 4.37. Точное решение уравнения (4.168).

сводится к виду $F = cu$. Если ввести $A = \partial F / \partial u$, то уравнение (4.172) примет вид

$$u_t + Au_x = \mu u_{xx}. \quad (4.174)$$

Для нелинейного уравнения Бюргерса ($c = 0$, $b = 1$) A равно u , а для линейного уравнения ($b = 0$) A равно c . В последующем при анализе разностных схем мы будем использовать уравнение Бюргерса как в виде (4.172), так и в виде (4.174).

4.5.1. Метод разностей вперед по времени и центральных разностей по пространству (ВВЦП)

Методом ВВЦП Роуч [Roache, 1972] назвал метод, полученный при применении к линеаризованному уравнению Бюргерса (к уравнению (4.174) при $A = c$) разностей вперед по времени и центральных разностей по пространству. Полученная

в результате разностная схема имеет вид

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (4.175)$$

Это — явная одношаговая схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$. Выпишем модифицированное уравнение

$$u_t + cu_x = \left(\mu - \frac{c^2 \Delta t}{2} \right) u_{xx} + \frac{c(\Delta x)^2}{3} \left(3r - v^2 - \frac{1}{2} \right) u_{xxx} + \\ + \frac{c(\Delta x)^3}{12} \left(\frac{r}{v} - \frac{3r^2}{v} - 2v + 10vr - 3v^3 \right) u_{xxxx} + \dots \quad (4.176)$$

Для уравнения Бюргера $r = \mu \Delta t / (\Delta x)^2$, а $v = c \Delta t / \Delta x$. Отметим, что при $r = 1/2$, $v = 1$ коэффициенты при первых двух членах в правой части модифицированного уравнения обращаются в нуль. К сожалению, при этом исчезает вязкий член μu_{xx} в рассматриваемом уравнении в частных производных. Следовательно, метод ВЦП при $r = 1/2$ и $v = 1$ приводит к неприемлемой конечно-разностной аппроксимации уравнения Бюргера, так как в этом случае разностная схема принимает вид $u_j^{i+1} = u_{j-1}^i$.

Из описанного ранее эвристического анализа устойчивости следует, что для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы коэффициент при u_{xx} был больше нуля. Следовательно, $c^2 \Delta t / 2 \leq \mu$, или

$$\frac{c^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \leq 2\mu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$v^2 \leq 2r. \quad (4.177)$$

Очень полезным параметром, который естественно появляется при численном решении уравнения Бюргера, оказывается *сеточное число Рейнольдса*, определяемое соотношением

$$\text{Re}_{\Delta x} = c \Delta x / \mu. \quad (4.178)$$

Этот безразмерный параметр, характеризующий отношение конвекции к диффузии, играет важную роль при определении характера решения уравнения Бюргера. Сеточное число Рейнольдса (называемое также числом Пекле) можно выразить через v и r следующим образом:

$$\text{Re}_{\Delta x} = \frac{c \Delta x}{\mu} = \frac{c \Delta t}{\Delta x} \frac{(\Delta x)^2}{\mu \Delta t} = \frac{v}{r}.$$

Следовательно, условие устойчивости (4.177) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \Delta x \leq 2/\nu. \quad (4.179)$$

Мы уже отмечали раньше, что эвристический анализ устойчивости не всегда позволяет определить все условия устойчивости разностной схемы. В рассматриваемом нами сейчас случае так и произошло. Чтобы получить все условия устойчивости, воспользуемся фурье-анализом (методом Неймана). Для схемы ВВЦП коэффициент перехода

$$G = 1 + 2r(\cos \beta - 1) - i\nu(\sin \beta) \quad (4.180)$$

построен на рис. 4.38(а) для данных ν и r . Уравнение для G описывает эллипс с центром в точке $(1 - 2r)$ вещественной оси.

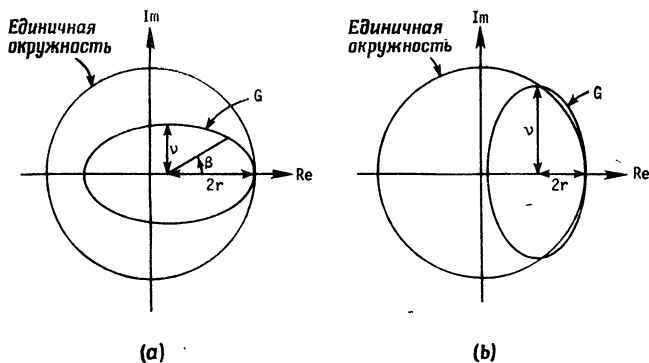


Рис. 4.38. Условие устойчивости схемы ВВЦП. (а) $\nu < 1$, $r < 1/2$, $\nu^2 < 2r$; (б) $\nu < 1$, $r < 1/2$, $\nu^2 > 2r$.

Большая и меньшая полуоси эллипса равны $2r$ и ν соответственно. Кроме того, эллипс касается единичной окружности в точке пересечения этой окружности с положительной вещественной осью. Необходимое условие устойчивости $|G| \leq 1$ эквивалентно требованию, что эллипс целиком содержится внутри единичной окружности. Последнее условие накладывает следующие ограничения на длины большой и малой полуосей эллипса:

$$\nu \leq 1, \quad 2r \leq 1. \quad (4.181)$$

Однако и при выполнении этих условий разностная схема может быть неустойчива, как видно из рис. 4.38(б). Конечно, полное условие устойчивости можно найти, исследуя обычным образом выражение для модуля коэффициента перехода. Проведя такой анализ, получим

$$\nu^2 \leq 2r, \quad r \leq 1/2. \quad (4.182)$$

Первое условие уже было получено раньше на основе эвристического анализа устойчивости. Комбинируя эти два неравенства, можно определить еще одно: $\nu \leq 1$, которое уже было получено на основе графического анализа. Условия устойчивости накладывают следующие ограничения на величину сеточного числа Рейнольдса:

$$2\nu \leq \text{Re}_{\Delta x} \leq 2/\nu. \quad (4.183)$$

Следует заметить, что в некоторых работах правая часть последнего неравенства ошибочно записывается как $\text{Re}_{\Delta x} \leq 2$.

Важной характеристикой конечно-разностных схем, используемых для решения уравнения Бюргерса, является появление осцилляций (всплесков) решения. Очевидно, при расчете течений жидкости мы хотели бы избежать появления таких осцилляций. При решении уравнения Бюргерса методом ВВЦП осцилляции возникают, если сеточное число Рейнольдса расположено в диапазоне

$$2 \leq \text{Re}_{\Delta x} \leq 2/\nu.$$

Если сеточное число Рейнольдса немного больше $2/\nu$, то эти осцилляции в конце концов приведут к «взрыву» решения, как и следовало ожидать из проведенного выше анализа устойчивости. Чтобы найти причину возникновения осцилляций, перепишем уравнение (4.175) в виде

$$u_j^{n+1} = (r - \nu/2) u_{j+1}^n + (1 - 2r) u_j^n + (r + \nu/2) u_{j-1}^n, \quad (4.184)$$

или, что эквивалентно, в виде

$$u_j^{n+1} = \frac{r}{2} (2 - \text{Re}_{\Delta x}) u_{j+1}^n + (1 - 2r) u_j^n + \frac{r}{2} (2 + \text{Re}_{\Delta x}) u_{j-1}^n. \quad (4.185)$$

Теперь предположим, что мы хотим найти решение уравнения Бюргерса с начальным условием $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x < 1$, и граничными условиями $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1$ на сетке, состоящей из 11 узлов. На первом шаге по времени все значения u на $(n+1)$ -м временном слое равны нулю, кроме значений в узле $j = 10$, где

$$\begin{aligned} u_{10}^{n+1} &= \frac{r}{2} (2 - \text{Re}_{\Delta x}) (1) + (1 - 2r) (0) + \frac{r}{2} (2 + \text{Re}_{\Delta x}) (0) = \\ &= \frac{r}{2} (2 - \text{Re}_{\Delta x}), \end{aligned}$$

и на границе ($j = 11$), где u_{11} равно заданному значению 1. Если $\text{Re}_{\Delta x}$ больше двух, то величина u_{10}^{n+1} будет отрицательна, что и вызовет осцилляции решения, как показано на рис. 4.39(а).

Этот рисунок построен для случая $\nu = 0.4$, $r = 0.1$, $Re_{\Delta x} = 4 < < 2/\nu$. При этих параметрах u_{10}^{n+1} равно -0.1 . На следующем шаге по времени осцилляция продвигается еще на одну точку дальше от правой границы. Значения u при $j = 9$ и $j = 10$ равны $u_9^{n+2} = +0.01$, $u_{10}^{n+2} = -0.18$, а вид решения показан на рис. 4.39(б). Постепенно осцилляции распространяются до другой границы, но при этом остаются ограниченными по величине

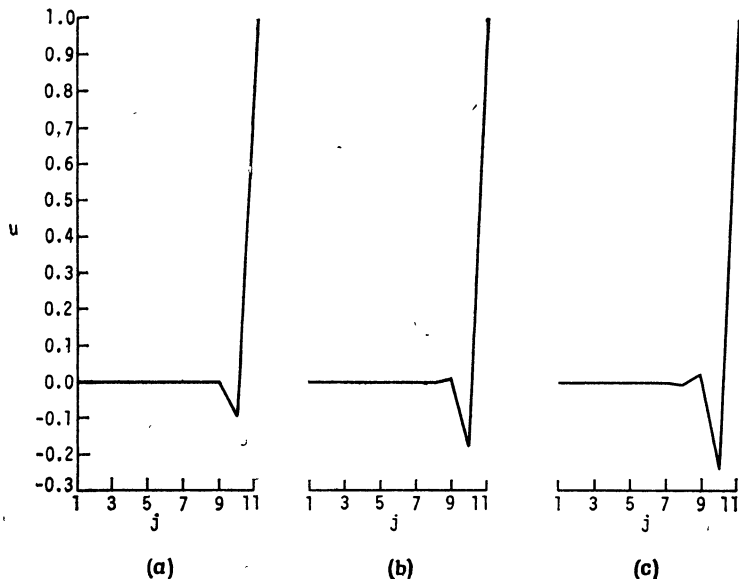


Рис. 4.39. Возникновение осцилляций при численном решении уравнения Бюргера. (а) $(n + 1)$ -й слой по времени; (б) $(n + 2)$ -й слой по времени; (с) $(n + 3)$ -й слой по времени.

в течение всего решения, пока итерационно не получится стационарное состояние. Рассмотренные осцилляции аналогичны тем, которые возникают в рамках невязкого уравнения Бюргера при расчете движущегося разрыва по схемам второго (или более высокого) порядка точности.

Лучше понять причины возникновения осцилляций можно, также изучив коэффициенты уравнения (4.185) с физической точки зрения. Мы видим, что если $Re_{\Delta x}$ больше двух, то коэффициент при u_{j+1}^n становится отрицательным. Следовательно, чем больше u_{j+1}^n , тем меньше u_j^{n+1} . Для вязких задач такое поведение решения не имеет физического смысла, так как с ростом u_{j+1}^n величина u_j^{n+1} должна «тянуться» за ней все сильнее и

сильнее (т. е. возрастет). Следствием такого нефизического поведения решения и является возникновение осцилляций решения.

При использовании метода ВВЦП можно избавиться от осцилляций, если при аппроксимации конвективного члена cu_x заменить центральные разности, обеспечивающие второй порядок точности по пространству, на разности против потока, имеющие первый порядок точности. Тогда при $c > 0$ получим разностную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (4.186)$$

Схема первого порядка точности подавляет осцилляции благодаря введению в решение дополнительной диссипации. К сожалению, вносимая диссипация делает разностную схему настолько неточной, что разностная схема (4.186) не может рассматриваться как схема решения уравнения Бюргерса. Вносимая в решение большая диссипация очевидна из анализа модифицированного уравнения для этой схемы

$$u_t + cu_x = \left[\mu \left(1 + \frac{\text{Re}_{\Delta x}}{2} \right) - \frac{c^2 \Delta t}{2} \right] u_{xx} + \dots \quad (4.187)$$

и сравнения его с модифицированным уравнением для схемы ВВЦП. В уравнении (4.187) в выражении для коэффициента при члене, содержащем u_{xx} , появляется дополнительное слагаемое $\mu \text{Re}_{\Delta x}/2$. Следовательно, если $\text{Re}_{\Delta x}$ больше 2, то этот дополнительный член приводит к большей диссипации (диффузии), чем вязкий член в исходном уравнении Бюргерса. Для уменьшения дисперсионных ошибок Леонард [Leonard, 1979a; 1979b], не вводя слишком большую искусственную вязкость, предложил аппроксимировать конвективный член разностями против потока с третьим порядком точности. При $c > 0$ в этом случае получается разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{j+1}^n - 3u_j^n + 3u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{6\Delta x} \right) = \\ = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}, \end{aligned} \quad (4.188)$$

а при $c < 0$ — схема

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{j+2}^n - 3u_{j+1}^n + 3u_j^n - u_{j-1}^n}{6\Delta x} \right) = \\ = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \quad (4.189)$$

4.5.2. Схема «чехарда» Дюфорта — Франкела

Мы уже отметили, что линеаризованное уравнение Бюргера является комбинацией волнового уравнения первого порядка и уравнения теплопроводности. Поэтому мы можем попытаться скомбинировать некоторые алгоритмы, использовавшиеся раньше для решения волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Одной из таких схем и является схема «чехарда» Дюфорта — Франкела. Для уравнения (4.174) она имеет вид

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + A_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \mu \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (4.190)$$

Это одношаговая явная разностная схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta t/\Delta x)^2, (\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$. Для линейного случая ($A = c$) модифицированное уравнение имеет вид

$$u_t + cu_x = \mu(1 - v^2)u_{xx} + \left[\frac{2\mu^2 c (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{6} c (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} c^3 (\Delta t)^2 - \frac{2\mu^2 c^3 (\Delta t)^4}{(\Delta x)^4} \right] u_{xxx} + \dots \quad (4.191)$$

В линейном случае можно провести анализ устойчивости методом Неймана (анализ устойчивости Фурье) и показать, что схема устойчива при $v \leq 1$. Отметим, что условие устойчивости схемы не зависит от величины коэффициента вязкости μ ; это связано с тем, что для аппроксимации вязкого члена использована схема Дюфорта — Франкела. Однако из условия согласованности следует, что величина $(\Delta t/\Delta x)^2$ должна стремиться к нулю при Δt и Δx , стремящихся к нулю, что накладывает на шаг по времени куда более жесткое ограничение, чем условие $v \leq 1$. Поэтому с точки зрения Пейрета и Вивьяна [Peuret, Viviant 1975] схема «чехарда» Дюфорта — Франкела больше подходит для расчета стационарного решения (в этом случае точность расчета по времени несущественна), чем для решения нестационарных задач. В нелинейном случае рассматриваемая схема неустойчива, если $\mu = 0$.

4.5.3. Метод Браиловской

И. Ю. Браиловская [1965] предложила следующую явную двухшаговую схему для решения уравнения (4.172):

Предиктор

$$u_j^{\overline{n+1}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) + r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (4.192)$$

Корректор

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^{n+1} - F_{j-1}^{n+1}) + r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Формально эта схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$. Если мы хотим найти лишь стационарное решение, то первый порядок точности по времени несуществен. Для линейного уравнения Бюргерса необходимое условие Неймана устойчивости разностной схемы имеет вид

$$|G|^2 = 1 - \{v^2 \sin^2 \beta (1 - v^2 \sin^2 \beta) + 4r(1 - \cos \beta)\} \times \\ \times [1 - r(1 - \cos \beta)(1 + v^2 \sin^2 \beta)] \leq 1. \quad (4.193)$$

Если пренебречь вязкостью (т. е. положить $r = 0$), то условие устойчивости примет вид $v \leq 1$, а если пренебречь конвекцией, т. е. положить $v = 0$, то получим, что схема устойчива при $r \leq 1/2$. На основе этих результатов Картер [Carter, 1971] предложил следующее условие устойчивости схемы Браиловской:

$$\Delta t \leq \min \left[\frac{(\Delta x)^2}{2\mu}, \frac{(\Delta x)}{|A|} \right]. \quad (4.194)$$

Привлекательной особенностью этой схемы является то, что на шагах предиктор и корректор вязкий член один и тот же, поэтому его можно вычислить только один раз.

4.5.4. Метод Аллена — Чена

Аллен и Чен [Allen, Cheng, 1970] предложили модификацию схемы Браиловской, позволяющую исключить из условия устойчивости ограничение на r . Эта схема имеет вид

Предиктор

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) + r(u_{j+1}^n - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^n).$$

(4.195)

Корректор

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^{n+1} - F_{j-1}^{n+1}) + r(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}).$$

Необычная конечно-разностная аппроксимация вязкого члена позволяет избежать ограничений на r , связанных с условием устойчивости, поэтому рассматриваемая схема в случае линейного уравнения Бюргерса устойчива при $v \leq 1$. Благодаря этому при больших μ этот метод позволяет использовать существенно больший шаг по времени, чем метод Браиловской. Метод Аллена — Чена формально имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$.

4.5.5. Метод Лакса — Вендроффа

Мы уже применяли двухшаговый метод Лакса — Вендроффа для решения волнового уравнения. Среди нескольких различных вариантов использования этого метода для решения полного уравнения Бюргерса есть и такой:

Шаг 1

$$u_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) + r [(u_{j-3/2}^n - 2u_{j-1/2}^n + u_{j+1/2}^n) + (u_{j+3/2}^n - 2u_{j+1/2}^n + u_{j-1/2}^n)]. \quad (4.196)$$

Шаг 2

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}) + r (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Этот вариант схемы Лакса — Вендроффа был использован Томменом [Thompen, 1966] для решения уравнений Навье — Стокса. Другой вариант предложен Палумбо и Рубином [Palumbo, Rubin, 1972]. Он отличается тем, что предварительные значения вычисляются на слое с номером $n + 1$, а не $n + 1/2$. Описанная в этом разделе разностная схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$. Точное условие устойчивости этой схемы, полученное в результате линейного анализа устойчивости, имеет вид

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (A^2 \Delta t + 2\mu) \leq 1. \quad (4.197)$$

4.5.6. Метод Мак-Кормака

Применяя метод Мак-Кормака к полному уравнению Бюргерса (4.172), получаем разностную схему

Предиктор

$$u_j^{\overline{n+1}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) + r (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (4.198)$$

Корректор

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} [u_j^n + u_j^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_j^{\overline{n+1}} - F_{j-1}^{\overline{n+1}}) + r (u_{j+1}^{\overline{n+1}} - 2u_j^{\overline{n+1}} + u_{j-1}^{\overline{n+1}})].$$

Эта схема имеет второй порядок точности как по пространству, так и по времени. Эта разностная схема получена при аппроксимации производной $\partial F / \partial x$ на шаге предиктор разностями вперед, а на шаге корректор — разностями назад. Возможен и другой вариант схемы Мак-Кормака, использующий на шаге предиктор разности назад, а на шаге корректор — разности вперед.

Оба варианта схемы Мак-Кормака имеют второй порядок точности. Найти точное условие устойчивости метода Мак-Кормака при решении уравнения Бюргерса не удастся, однако можно использовать либо условие (4.194), либо эмпирическую формулу [Tannehill et al., 1975]

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{|A| \Delta x + 2\mu}, \quad (4.199)$$

причем в обоих случаях с некоторым коэффициентом запаса. Последняя формула при $|A|$, равном нулю, переходит в обычное для вязкого члена условие $r \leq 1/2$, а при μ , равном нулю, она переходит в обычное невязкое условие устойчивости $|A| \Delta t / \Delta x \leq 1$. Метод Мак-Кормака широко применялся не только для решения уравнений Эйлера, но и для решения уравнений Навье—Стокса в случае ламинарного течения. Для многомерных задач разработан метод Мак-Кормака с ращеплением по времени, который будет описан в п. 4.5.8. Для решения задач с большими числами Рейнольдса Мак-Кормак разработал метод быстрого решения уравнений [MacCormack, 1976] и неявный метод [MacCormack, 1981], который будет описан в гл. 9.

Интересный вариант обычного метода Мак-Кормака получается при применении верхней релаксации на обоих шагах предиктор и корректор [Désidéri, Tannehill, 1977a]:

Предиктор

$$\begin{aligned} v_j^{\overline{n+1}} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) + r (\bar{u}_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \\ u_j^{\overline{n+1}} &= u_j^{\bar{n}} + \bar{\omega} (v_j^{\overline{n+1}} - u_j^{\bar{n}}). \end{aligned} \quad (4.200)$$

Корректор

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= u_j^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_j^{\overline{n+1}} - F_{j-1}^{\overline{n+1}}) + r (u_{j+1}^{\overline{n+1}} - 2u_j^{\overline{n+1}} + u_{j-1}^{\overline{n+1}}), \\ u_j^{n+1} &= u_j^n + \omega (v_j^{n+1} - u_j^n). \end{aligned} \quad (4.201)$$

В приведенных соотношениях v — промежуточные значения неизвестных, а u — их конечные значения, $\bar{\omega}$ и ω — релаксационные параметры, а $u_j^{\bar{n}}$ — значение u_j , полученное на предыдущем временном слое. Обычная схема Мак-Кормака получается, если положить $\bar{\omega} = 1$, $\omega = 1/2$. В общем случае метод Мак-Кормака с верхней релаксацией имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$. Однако можно показать [Désidéri, Tannehill, 1977b], что если

$$\omega \bar{\omega} = |\bar{\omega} - \omega|, \quad (4.202)$$

то при решении линейного уравнения Бюргерса этот метод имеет второй порядок точности. Применение верхней релаксации

ускоряет сходимость численного метода по сравнению с обычным методом Мак-Кормака примерно в Ω раз, где

$$\Omega = \frac{2\bar{\omega}\omega}{1 - (\bar{\omega} - 1)(\omega - 1)}. \quad (4.203)$$

Анализ устойчивости Фурье в случае линейного уравнения Бюргерса не позволяет найти необходимые и достаточные условия устойчивости рассматриваемой разностной схемы в виде алгебраического соотношения между параметрами ν , r , $\bar{\omega}$ и ω . Однако необходимое условие устойчивости имеет вид

$$|(\bar{\omega} - 1)(\omega - 1)| \leq 1. \quad (4.204)$$

В общем случае условие устойчивости схемы приходится находить численно, и оно оказывается обычно более жестким, чем условия $\bar{\omega} \leq 2$ и $\omega \leq 2$.

4.5.7. Метод Брили — Макдональда

Неявный метод Брили — Макдональда [Briley, McDonald, 1973] основан на следующей конечно-разностной аппроксимации по времени уравнения (4.172) (фактически применяется неявный метод Эйлера):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j^{n+1} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+1}. \quad (4.205)$$

Член $(\partial F/\partial x)_j^{n+1}$ разлагается в ряд Тейлора

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j^{n+1} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j^n + \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]_j^n + O((\Delta t)^2), \quad (4.206)$$

при этом появляется производная $\partial/\partial t(\partial F/\partial x)$, которая преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial t}\right). \quad (4.207)$$

И наконец, комбинируя соотношения (4.205) — (4.207) и аппроксимируя производные по времени разностями вперед, а производные по пространству центральными разностями, получаем схему Брили — Макдональда

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{A_{j+1}^n (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) - A_{j-1}^n (u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = \mu \delta_x^2 u_j^{n+1}. \quad (4.208)$$

Формально это схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$, однако стационарное решение определяется с погрешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2)$. Точность разностной схемы по времени может быть повышена, если для аппроксимации производных по времени использовать центрированные разности или если ввести еще один временной слой, как это было уже сделано в случае схемы Бима — Уорминга. Например, применяя для аппроксимации производных по времени в уравнении (4.172) центрированные разности, получаем

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^n + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^{n+1} \right] = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^{n+1} \right]. \quad (4.209)$$

Поступая так же, как в раньше, получаем следующую разностную схему второго порядка точности:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{A_{j+1}^n (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) - A_{j-1}^n (u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n)}{4\Delta x} = \\ = \frac{\mu}{2(\Delta x)^2} \left[(\delta_x^2 u)_j^n + (\delta_x^2 u)_j^{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (4.210)$$

Обе разностные схемы (4.208) и (4.210) безусловно устойчивы и приводят к системам линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которые можно решать прогонкой.

Метод Брили — Макдональда тесно связан с методом решения уравнений Навье — Стокса, разработанным Бимом и Уормингом [Beam, Warming, 1978]. Разностные схемы, полученные при решении этими методами уравнения Бюргерса, могут быть приведены к одному и тому же виду. Для этого записанные в дельта-форме члены в схеме Бима — Уорминга надо выразить через неизвестные (т. е. заменить Δu_j^n на $(u_j^{n+1} - u_j^n)$). Метод Бима — Уорминга решения уравнений Навье — Стокса описан в гл. 9.

4.5.8. Метод Мак-Кормака с расщеплением по времени

Для иллюстрации применения численных методов, предназначенных специально для решения многомерных задач, рассмотрим двумерное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (4.211)$$

Если ввести A , равное $\partial F / \partial u$, и B , равное $\partial G / \partial u$, то уравнение (4.211) можно переписать в виде

$$u_t + Au_x + Bu_y = \mu (u_{xx} + u_{yy}). \quad (4.212)$$

Рей [Rai, 1982] получил точное стационарное решение двумерного линейризованного уравнения Бюргерса

$$u_t + cu_x + du_y = \mu (u_{xx} + u_{yy}) \quad (4.213)$$

с граничными условиями ($0 \leq t \leq \infty$)

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= \frac{1 - \exp[(x-1)c/\mu]}{1 - \exp(-c/\mu)}, & u(x, 1, t) &= 0, \\ u(0, y, t) &= \frac{1 - \exp[(y-1)d/\mu]}{1 - \exp(-d/\mu)}, & u(1, y, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.214)$$

и начальным условием

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq 1).$$

Решение имеет вид

$$u(x, y) = \left\{ \frac{1 - \exp[(x-1)c/\mu]}{1 - \exp(-c/\mu)} \right\} \left\{ \frac{1 - \exp[(y-1)d/\mu]}{1 - \exp(-d/\mu)} \right\}. \quad (4.215)$$

Отметим, что записанное в таком виде решение легко обобщается на случай трехмерного линейризованного уравнения Бюргерса. Все рассмотренные методы решения одномерного уравнения Бюргерса применимы и для решения двумерного уравнения Бюргерса, однако при решении многомерных задач используют обычно модифицированные алгоритмы. Это связано с тем, что условия устойчивости явных схем становятся более жесткими, а при использовании неявных схем желательно свести задачу к решению систем уравнений с трехдиагональной матрицей. В качестве примера такой модификации рассмотрим явный метод Мак-Кормака с расщеплением по времени.

Метод Мак-Кормака с расщеплением по времени [MacCormack, 1971; MacCormack, Baldwin, 1975] так «расщепляет» оригинальную схему Мак-Кормака, что решение многомерной задачи сводится к последовательному решению одномерных задач. Благодаря этому условие устойчивости разностной схемы становится менее жестким. Другими словами, расщепление позволяет получить решение в каждом направлении с максимально допустимым шагом по времени. Особенно заметно преимущество расщепления в том частном случае, когда максимально допустимые шаги по времени Δt_x , Δt_y сильно отличаются друг от друга из-за различия шагов Δx , Δy разностной сетки. Чтобы записать метод расщепления, воспользуемся одномерными разностными операторами $L_x(\Delta t_x)$ и $L_y(\Delta t_y)$. Если оператор $L_x(\Delta t_x)$ применяется к величине $u_{i,j}^n$, то выражение

$$u_{i,j}^{*} = L_x(\Delta t_x) u_{i,j}^n \quad (4.216)$$

по определению эквивалентно следующей двухшаговой формуле:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j}^n &= u_{i,j}^n - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) + \mu \Delta t_x \hat{\delta}_x^2 u_{i,j}^n, \\ u_{i,j}^* &= \frac{1}{2} \left[u_{i,j}^n + \bar{u}_{i,j}^n - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n) + \mu \Delta t_x \hat{\delta}_x^2 \bar{u}_{i,j}^n \right]. \end{aligned} \quad (4.217)$$

Верхним индексом * обозначен фиктивный временной слой. Аналогично определяется и оператор $L_y(\Delta t_y)$. Выражение

$$u_{i,j}^* = L_y(\Delta t_y) u_{i,j}^n \quad (4.218)$$

по определению эквивалентно

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j}^n &= u_{i,j}^n - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} (G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n) + \mu \Delta t_y \hat{\delta}_y^2 u_{i,j}^n, \\ u_{i,j}^* &= \frac{1}{2} \left[u_{i,j}^n + \bar{u}_{i,j}^n - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} (G_{i,j}^n - G_{i,j-1}^n) + \mu \Delta t_y \hat{\delta}_y^2 \bar{u}_{i,j}^n \right]. \end{aligned} \quad (4.219)$$

Применяя к величине $u_{i,j}^n$ операторы L_x и L_y , разностную схему второго порядка точности можно построить следующим образом:

$$u_{i,j}^{n+1} = L_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) L_x(\Delta t) L_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) u_{i,j}^n. \quad (4.220)$$

Эта разностная схема имеет погрешность аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$. В общем случае разностная схема, полученная при применении такой последовательности операторов, удовлетворяет следующим условиям: (1) устойчивости, если для каждого оператора шаг по времени не превосходит максимально допустимый для этого оператора; (2) согласованности, если суммы шагов по времени для каждого оператора совпадают; (3) аппроксимации со вторым порядком точности, если последовательность операторов симметрична.

Приведем другие последовательности операторов, удовлетворяющих перечисленным условиям:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= L_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) L_x \left(\frac{\Delta t}{2} \right) L_x \left(\frac{\Delta t}{2} \right) L_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) u_{i,j}^n, \\ u_{i,j}^{n+1} &= \left[L_y \left(\frac{\Delta t}{2m} \right) \right]^m L_x(\Delta t) \left[L_y \left(\frac{\Delta t}{2m} \right) \right]^m u_{i,j}^n, \end{aligned} \quad (4.221)$$

где m — целое. Последнее выражение особенно полезно в случае $\Delta y \ll \Delta x$.

4.5.9. Неявные методы переменных направлений

Для решения уравнений Навье — Стокса движения газа В. И. Полежаев [1967] предложил модифицированный неявный метод переменных направлений Писмена — Ракфорда. Применяя этот метод к решению двумерного уравнения Бюргерса (4.212), получаем разностную схему

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{\Delta t}{2} \left(A_{i,j}^n \frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} - \mu \hat{\delta}_x^2 \right) \right] u_{i,j}^* &= \\ &= \left[1 - \frac{\Delta t}{2} \left(B_{i,j}^n \frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} - \mu \hat{\delta}_y^2 \right) \right] u_{i,j}^n, \\ \left[1 + \frac{\Delta t}{2} \left(B_{i,j}^* \frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} - \mu \hat{\delta}_y^2 \right) \right] u_{i,j}^{n+1} &= \\ &= \left[1 - \frac{\Delta t}{2} \left(A_{i,j}^n \frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} - \mu \hat{\delta}_x^2 \right) \right] u_{i,j}^*. \end{aligned} \quad (4.222)$$

Это схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2(\Delta y)^2)$. В линейном случае она безусловно устойчива. Очевидно, на каждом шаге по времени необходимо решать систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей.

Если разностную схему Брили — Макдональда (4.208) прямо применить для решения двумерного уравнения Бюргерса, то задача сведется к решению системы алгебраических уравнений, матрица которой отлична от трехдиагональной. От этого недостатка схемы можно избавиться, воспользовавшись двухшаговым методом переменных направлений Дугласа — Ганна [Douglas, Gunn, 1964]

$$\begin{aligned} \left[1 + \Delta t \left(\frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} A_{i,j}^n - \mu \hat{\delta}_x^2 \right) \right] u_{i,j}^* &= \\ &= \left[1 - \Delta t \left(\frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} B_{i,j}^n - \mu \hat{\delta}_y^2 \right) \right] u_{i,j}^n + (\Delta t) S_{i,j}^n, \end{aligned} \quad (4.223)$$

$$\begin{aligned} \left[1 + \Delta t \left(\frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} B_{i,j}^n - \mu \hat{\delta}_y^2 \right) \right] u_{i,j}^{n+1} &= \\ &= u_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} A_{i,j}^n - \mu \hat{\delta}_x^2 \right) u_{i,j}^* + \Delta t S_{i,j}^n, \end{aligned} \quad (4.224)$$

где

$$S_{i,j}^n = -\frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} F_{i,j}^n - \frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} G_{i,j}^n + \frac{\bar{\delta}_x}{2\Delta x} (A_{i,j}^n u_{i,j}^n) + \frac{\bar{\delta}_y}{2\Delta y} (B_{i,j}^n u_{i,j}^n).$$

4.5.10. Многоитерационный метод предиктор-корректор

Рубин и Лин [Rubin, Lin, 1972] предложили многоитерационный метод предиктор-корректор для расчета параболизированных уравнений Навье — Стокса. Этот метод исключает одновременное появление в уравнениях значений функций в узловых точках по нормальному y и поперечному z направлениям, а для достижения приемлемой точности используются итерации. Для иллюстрации этого метода применим его к решению трехмерного линейного уравнения Бюргерса

$$u_x + cu_y + du_z = \mu (u_{yy} + u_{zz}), \quad (4.225)$$

которое является модельным уравнением для параболизированных уравнений Навье — Стокса. В результате применения к этому уравнению многоитерационного метода предиктор-корректор получим разностную схему

$$\begin{aligned} u_{i+1, j, k}^{m+1} = & u_{i, j, k} - \frac{c}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} (u_{i+1, j+1, k}^{m+1} - u_{i+1, j-1, k}^{m+1}) - \\ & - \frac{d}{2} \frac{\Delta x}{\Delta z} (u_{i+1, j, k+1}^m - u_{i+1, j, k-1}^m) + \\ & + \frac{\mu \Delta x}{(\Delta y)^2} (u_{i+1, j+1, k}^{m+1} - 2u_{i+1, j, k}^{m+1} + u_{i+1, j-1, k}^{m+1}) + \\ & + \frac{\mu \Delta x}{(\Delta z)^2} (u_{i+1, j, k+1}^m - 2u_{i+1, j, k}^m + u_{i+1, j, k-1}^m), \quad (4.226) \end{aligned}$$

где индексом m обозначен номер итерации, $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$, $z = k\Delta z$. На первой итерации m полагается равным нулю, а соответствующие члены уравнения аппроксимируются либо простой линейной подстановкой $u_{i+1, j, k}^0 = u_{i, j, k}$, либо с использованием разложений в ряд Тейлора, таких, как

$$u_{i+1, j, k}^0 = 2u_{i, j, k} - u_{i-1, j, k} + O((\Delta x)^2).$$

Тогда в уравнение (4.226) при $m = 0$ входят лишь три неизвестные

$$u_{i+1, j+1, k}^1, \quad u_{i+1, j, k}^1, \quad u_{i+1, j-1, k}^1, \quad (4.227)$$

которые могут быть найдены из решения системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. В плоскости с номером $i + 1$ расчет проводится в направлении от столбца с номером $k = 1$, на котором заданы граничные условия, до последнего по k столбца узловых точек. На этом первая итерация заканчивается. На следующей итерации ($m = 1$) в уравнение (4.226) также входят три неизвестные:

$$u_{i+1, j+1, k}^2, \quad u_{i+1, j, k}^2, \quad u_{i+1, j-1, k}^2. \quad (4.228)$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока решение в плоскости $i + 1$ не сойдется. Обычно для достижения приемлемой точности достаточно двух итераций ($m = 0, m = 1$). После этого переходят к расчету в плоскости $i + 2$.

§ 4.6. Заключительные замечания

В этой главе мы попытались привести основные конечно-разностные методы решения простых модельных уравнений. При этом не ставилась задача описать все известные методы решения этих уравнений, поэтому некоторые довольно полезные методы не приведены. Однако представленные методы являются разумной предпосылкой для анализа методов решения более сложных задач, описанных в гл. 6—9.

Из представленной в этой главе информации видно, что для решения одной и той же задачи можно использовать множество различных численных методов. Отличие в качестве решений, получаемых этими методами, часто невелико, поэтому выбрать оптимальный метод довольно сложно. Однако выбрать наилучший метод можно при помощи опыта, полученного при программировании различными численными методами и последующем решении на ЭВМ модельных уравнений, описанных в этой главе.

Задачи

4.1. Выведите соотношение (4.19).

4.2. Получите модифицированное уравнение для схемы Лакса решения волнового уравнения. Сохраните члены вплоть до u_{xxxx} .

4.3. Повторите задачу 4.2 для неявной схемы Эйлера.

4.4. Получите модифицированное уравнение для схемы с перешагиванием (схемы «чехарда»). Сохраните члены вплоть до u_{xxxx} .

4.5. Повторите задачу 4.4 для схемы Лакса — Вендроффа.

4.6. Определите погрешность вычисления амплитуды и фазы при $\beta = 90^\circ$ после 10 шагов по времени, если волновое уравнение решается методом Лакса с $\nu = 0.5$.

4.7. Повторите задачу 4.6 для метода Мак-Кормака.

4.8. Пусть метод Лакса используется для решения волнового уравнения ($c = 1/2$) с начальным условием $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$, $0 \leq x \leq 2$, и периодическими граничными условиями при $\Delta x = 0.02$ и $\Delta t = 0.02$.

(а) Используя коэффициент перехода, найдите погрешность определения амплитуды и фазы после 20 шагов по времени.

(б) Используя модифицированное уравнение, найдите (приблизительно) погрешность определения амплитуды после 20 шагов по времени.

Указание. Точное решение линейного уравнения Бюргерса

$$u_t + cu_x = \mu u_{xx}$$

с начальным условием $u(x, 0) = \sin(kx)$ и периодическими граничными условиями имеет вид

$$u(x, t) = \exp(-k^2 \mu t) \sin[k(x - ct)].$$

4.9. Найдите коэффициент перехода при решении волнового уравнения методом с перешагиванием (методом «чехарда») и определите условия устойчивости получающейся разностной схемы.

4.10. Повторите задачу 4.9 для метода с разностями против потока.

4.11. Покажите, что при решении волнового уравнения методом Русанова получается разностная схема, эквивалентная следующей одношаговой разностной схеме:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - v(\mu_x \delta_x) \left(1 - \frac{\delta_x^2}{6}\right) u_j^n + v^2 \delta_x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta_x^2}{8}\right) u_j^n - \frac{v^3}{6} (\mu_x \delta_x^3) u_j^n - \frac{\omega}{24} \delta_x^4 u_j^n.$$

4.12. Используя метод Неймана, найдите условие устойчивости разностной схемы, получаемой при решении волнового уравнения методом Русанова. Указание: см. задачу 4.11.

4.13. Кроули [Crowley, 1967] предложил явную разностную схему второго порядка точности для решения волнового уравнения

$$u_j^{n+1} = u_j^n - v(\mu_x \delta_x) u_j^n + \frac{v^2}{2} (\mu_x^2 \delta_x^2) u_j^n - \frac{1}{8} v^3 (\mu_x \delta_x^3) u_j^n.$$

(а) Получите модифицированное уравнение для этой схемы, сохранив члены вплоть до u_{xxxx} .

(б) Найдите необходимые условия устойчивости этой схемы.

(с) Определите погрешность вычисления амплитуды и фазы после 10 шагов по времени при $\beta = 90^\circ$, если при решении волнового уравнения $v = 1$.

4.14. Решите на ЭВМ волновое уравнение $u_t + u_x = 0$, используя (а) схему Лакса; (б) схему Лакса — Вендроффа при начальном условии $u(x, 0) = \sin 2\pi x/L$, $0 \leq x \leq L$, и периодических граничных условиях. Используйте сетку, состоящую из 41 точки при $\Delta x = 1$, и проведите расчет до $t = 18$. Решите эту задачу для $n = 1, 3$ и $v = 1.0, 0.6, 0.3$; полученные результаты сопоставьте графически с точным решением. Определите значения β для $n = 1$ и $n = 3$ и вычислите погрешность в определении амплитуды и фазы для каждой из схем при $v = 0.6$. Сравните эти ошибки с ошибками, найденными из графиков.

4.15. Повторите задачу 4.14 для следующих схем: (а) схемы с разностями против потока; (б) схемы Мак-Кормака.

4.16. Повторите задачу 4.14 для следующих схем: (а) схемы Мак-Кормака, (б) схемы Русанова ($\omega = 3$).

4.17. Решите на ЭВМ волновое уравнение $u_t + u_x = 0$, используя (а) схему с разностями против потока, (б) схему Мак-Кормака, если заданы начальные условия

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 1, & x \leq 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x > 0, \end{aligned}$$

и граничные условия Дирихле. Используйте разностную сетку, состоящую из 41 узла при $\Delta x = 1$, и проведите расчет до значений $t = 18$. Решите эту

задачу для $\nu = 1.0, 0.6, 0.3$; полученные результаты сравните графически с точным решением.

4.18. Используя схему с разностями против потока, найдите решение двумерного волнового уравнения

$$u_t + c(u_x + u_y) = 0$$

и условия устойчивости полученной разностной схемы.

4.19. Получите модифицированное уравнение для простого неявного метода решения одномерного уравнения теплопроводности. Сохраните члены, включающие производные до u_{xxxx} .

4.20. Определите условия устойчивости разностной схемы, полученной при помощи комбинированного метода В к решению одномерного уравнения теплопроводности.

4.21. Определите коэффициент перехода для явной схемы переменных направлений Саульева и найдите условия устойчивости этой схемы.

4.22. Покажите, что для узлов сетки с четными номерами $(i + j + n)$ построенная методом «классики» разностная схема принимает вид

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n$$

4.23. Используйте простой явный метод для решения одномерного уравнения теплопроводности на разностной сетке, которая показана на рис. 3-4.1, при граничных условиях $u_1^n = 2 = u_3^n$ и начальных условиях $u_1^1 = 2 = u_3^1$,

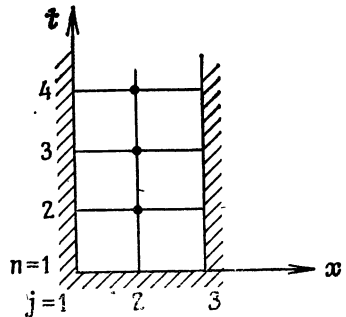


Рис. 3-4.1.

$u_2^1 = 1$. Покажите, что при $r = 1/4$ стационарное значение u в точке $j = 2$ равно

$$u_2^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

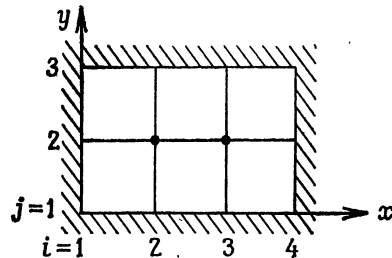


Рис. 3-4.2.

Обратите внимание на то, что члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию, сумма которой известна.

4.24. Используйте неявный метод переменных направлений для решения двумерного волнового уравнения и найдите u^{n+1} во внутренних узлах изображенной на рис. 3-4.2 сетки при $r_x = r_y = 2$, если заданы начальные условия

$$u^n = 1 - \frac{x}{3 \Delta x} \quad \text{на линии } y = 0,$$

$$u^n = 1 - \frac{y}{2 \Delta y} \quad \text{на линии } x = 0,$$

$$u^n = 0 \quad \text{всюду вне этих линий,}$$

а граничные условия сохраняются равными их начальным значениям.

4.25. Решите на ЭВМ уравнение теплопроводности $u_t = 0.2u_{xx}$, используя (а) простую явную схему, (б) явную схему переменных направлений [Barakat, Clark, 1966], если заданы начальные условия

$$u(x, 0) = 100 \sin(\pi x/L), \quad L = 1,$$

и граничные условия $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Проведите расчеты до $t = 0.5$ при приведенных в табл. 3-4.1 параметрах (если это возможно) и полученные результаты сравните графически с точным решением.

Таблица 3-4.1.

№ варианта	Количество узлов сетки	r
1	11	0.25
2	11	0.50
3	16	0.50
4	11	1.00
5	11	2.00

4.26. Повторите задачу 4.25 для схемы Кранка — Николсона.

4.27. Повторите задачу 4.25 для схемы Дюфорта — Франкела.

4.28. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

описывает изменение по времени температуры в однородном твердом теле с постоянными свойствами, если изменение температуры происходит лишь в одном направлении. Физически это почти точно можно осуществить в длинном тонком стержне или в очень большой (бесконечной) стенке конечной толщины.

Рассмотрим большую стенку толщины L с начальным распределением температуры $T(t, x) = c \sin(\pi x/L)$. Если температура поверхностей стенки и в дальнейшем поддерживается равной 0° , то решение для температуры при $t > 0$, $0 \leq x \leq L$, равно

$$T(t, x) = c \exp\left(\frac{-\alpha \pi^2 t}{L^2}\right) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Положим $c = 100^\circ\text{C}$, $L = 1$ м, $\alpha = 0.02$ м²/ч. Рассмотрим два явных метода решения этой задачи: (А) простую явную схему (4.73), устойчивую при $\alpha \Delta t / (\Delta x)^2 \leq 1/2$; (В) явную схему переменных направлений (4.107), предложенную в работе [Barakat, Clark, 1966]. При использовании этой схемы уравнение для p_j^{n+1} решают явным методом, начиная с границы $x = 0$, а уравнение для q_j^{n+1} — начиная с границы $x = L$. При использовании этой схемы условие устойчивости не ограничивает величину шага по времени. Составьте программы решения на ЭВМ рассматриваемой задачи указанными методами А и В. Кроме того, для сравнения методов вам придется вычислить точное решение. Сопоставьте эти методы хотя бы в следующих случаях:

1. Для $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1$ (соответствующее значение $\alpha \Delta t / (\Delta x)^2 = 0.2$) сопоставьте результаты, полученные методами А и В, с точным решением при $t = 10$ ч. Сравнение проводится графически.

2. Повторите указанное выше сопоставление на более мелкой сетке, полагая $\Delta x = 0.066667$ (т. е. при уменьшении шага в 15 раз). Согласуется ли уменьшение погрешности с порядком аппроксимации $O(\Delta x)^2$?

3. Для $\Delta x = 0.1$ подберите Δt так, чтобы $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2 = 0.5$, и сопоставьте при $t \approx 10$ ч результаты расчетов методами А и В с точным решением.

4. Покажите, что при $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2$, больших 0.5, метод А становится неустойчивым. Одним из возможных путей решения этой задачи является построение на средней линии тела зависимости температуры от времени при $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2 \approx 0.6$ при значениях времени 10—20 ч.

5. Для $\Delta x = 0.1$ подберите Δt так, чтобы $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2 = 1.0$, и сопоставьте при $t \approx 10$ ч результаты расчетов методом В с точным решением.

6. Увеличивая $\alpha\Delta t/(\Delta x)^2$ до 2, потом до 3 и т. д., повторите проведенное в предыдущем задании 5 сравнение до тех пор, пока согласованность результатов с точным решением не станет заметно плохой.

4.29. Повторите задачу 4.28, используя в качестве схемы В схему Кранка — Николсона.

4.30. Повторите задачу 4.28, используя в качестве схемы В простую неявную схему.

4.31. Придумайте метод решения задачи 4.28, используя конечно-разностную аппроксимацию вторых производных (3.35) с четвертым порядком точности.

4.32. Используйте конечно-разностную аппроксимацию (3.35) вторых производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\delta_x^2 u_{i,j}}{h^2(1 + \delta_x^2/12)}$$

для построения конечно-разностного аналога уравнения Лапласа при $\Delta x = \Delta y$. Используя значения u в узлах разностной сетки, перейдите к явной записи разностной схемы. Чему равна погрешность аппроксимации такой разностной схемы?

4.33. Найдите погрешность аппроксимации конечно-разностной схемы (4.114) решения уравнения Лапласа при (а) $\Delta x = \Delta y$; (б) $\Delta x \neq \Delta y$.

4.34. Чему равна погрешность аппроксимации уравнения Пуассона $u_{xx} + u_{yy} = x + y$ по девятиточечной разностной схеме (4.114) при $\Delta x = \Delta y$?

4.35. В поперечном сечении, изображенном на рис. 3-4.3, поверхность 1—4—7 является теплоизолированной (адиабатической). Коэффициент теплопередачи на поверхности 1—2—3 равен $28 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$. Коэффициент теплопроводности твердого материала равен $3.5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$. Используя итерационный метод Гаусса — Зайделя, найдите температуру в узлах 1, 2, 4 и 5.

4.36. Цилиндрическое ребро в форме иглы (рис. 3-4.4) прикреплено к стенке, имеющей температуру 200 °C , а его поверхность находится в газе с температурой 30 °C . Коэффициент теплопередачи равен $300 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$. Игла сделана из нержавеющей стали с коэффициентом теплопроводности

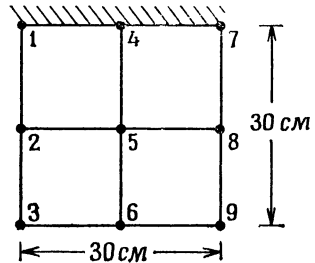


Рис. 3-4.3. $T_\infty = 0 \text{ °C}$; $h = 28 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$.

18 Вт/м²·°С. Разделите иглу на 5 частей и при помощи итерационного метода Гаусса — Зайделя найдите температуру в узлах сетки. Вычислите скорость теплопередачи со всей поверхности иглы. При этом вы можете пренебречь

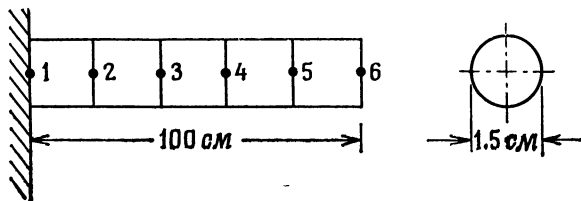


Рис. 3-4.4.

потерями тепла через наружный конец иглы (т. е. предположить, что он теплоизолирован).

4.37. Решите двумерное стационарное уравнение теплопроводности в квадратной области $0 < x < 1, 0 < y < 1$, используя разностные сетки с шагами $\Delta x = \Delta y = 0.2$ и 0.1 . Сравните температуру в центре квадрата с точным решением. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} T &= 0, & x &= 0, x = 1, \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, & y &= 0, \\ T &= \sin(\pi x), & y &= 1. \end{aligned}$$

4.38. Рассмотрим описываемый уравнением Лапласа стационарный процесс распространения тепла в двумерной области, изображенной на рис. 3-4.5.

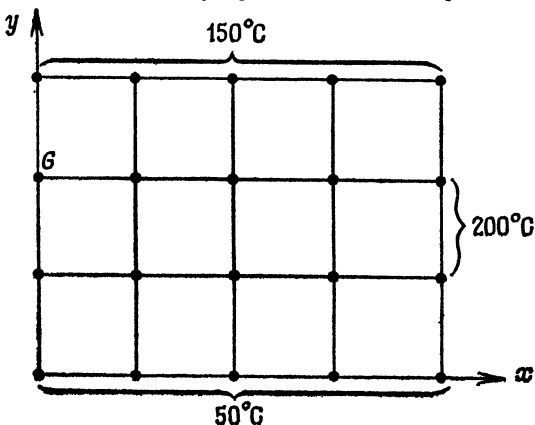


Рис. 3-4.5.

Сетка квадратная, т. е. $\Delta x = \Delta y = 0.02$ м. Условия на левой границе от точки G до следующей нижней точки имеют вид

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= h(T_\infty - T_w), \\ T_\infty &= 300^\circ \text{C}, \quad h = 250 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{C}, \quad k = 5 \text{ Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

(а) Используя метод контрольного объема, найдите приближенное разностное уравнение для температуры границы в точке G .

(б) Построив подходящий конечно-разностный аналог уравнения Лапласа, найдите стационарное распределение температуры итерационным методом Гаусса — Зайделя.

4.39. Решите задачу 4.38, используя метод итераций по строкам.

4.40. Пусть в стационарном случае требуется оценить распределение температуры в двумерной стенке камеры сгорания. Для такого предварительного анализа ее форма упрощена и показана на рис. 3-4.6. Напишите программу

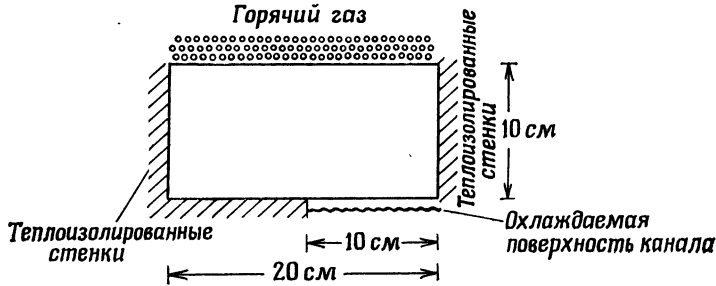


Рис. 3-4.6. Для горячего газа: $h_g = 1000 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$, $T_g = 2000 \text{ °C}$; для охлаждаемой поверхности канала: $h = 8000 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$, $T_b = 60 \text{ °C}$.

решения этой задачи на ЭВМ методом Гаусса — Зайделя с последовательной верхней релаксацией. Особое внимание обратите на уравнения на границе области. Положите шаг сетки равным 2 см ($\Delta x = \Delta y$), в результате получите сетку 6×11 .

(а) Вычислите стационарное поле температуры.

(б) Вычислите скорость теплопередачи на верхней стенке и проверьте, как близко она совпадает с теплом, снимаемым охладителем.

(с) При одном и том же условии сходимости итераций проведите расчеты для трех различных значений релаксационного параметра ω . Если вы можете использовать больше времени ЭВМ, то проведите более подробный поиск оптимального значения этого параметра $\omega_{\text{опт}}$.

4.41. Решите задачу 4.40, используя метод итераций по строкам.

4.42. Решите задачу 4.40, используя неявный метод переменных направлений.

4.43. Используйте схему Лакса для решения невязкого уравнения Бюргера на сетке, содержащей 51 узел в направлении оси x . Решите уравнение для движущегося вправо разрыва, если $u = 1$ в первых 11 узлах сетки и $u = 0$ в остальных узлах. Повторите расчеты при числах Куранта, равных 1.0, 0.6, 0.3, и сравните полученные численно решения с аналитическим решением в те же моменты времени.

4.44. Повторите задачу 4.43, используя схему Мак-Кормака. Примените оба варианта этой схемы с чередованием на шагах предиктор и корректор производных вперед — назад и назад — вперед.

4.45. Повторите задачу 4.43, используя схему Уорминга — Катлера — Ломакса.

4.46. Повторите задачу 4.43, используя схему Бима — Уорминга.

4.47. Найдите решение невязкого уравнения Бюргерса для течения с разрежением. Начальные условия заданы так: $u = 0$ в первых 21 узлах разностной сетки и $u = 1$ всюду вне этих узлов. Примените оба варианта схемы Мак-Кормака с чередованием на шагах предиктор и корректор производных вперед — назад и назад — вперед. Сравните результаты, полученные при двух различных числах Куранта, с точным аналитическим решением.

4.48. Повторите задачу 4.47, используя центрированную по времени схему Бима — Уорминга и неявную схему Эйлера.

4.49. Решите уравнение Бюргерса для неподвижного разрыва в вязкой жидкости. Начальные условия заданы так: $u = 1$ в левой граничной точке, $u = -1$ в правой граничной точке и $u = 0$ в остальных точках. Используйте для решения этой задачи схему Мак-Кормака.

4.50. Повторите задачу 4.49, используя схему Бима — Уорминга.

4.51. Постройте графически точное стационарное решение уравнения (4.158) с граничными условиями $u(0, t) = 1$, $u(1, t) = 0$ при $\mu = 0,1$.

4.52. Проверьте, что соотношение (4.169) является точным стационарным решением уравнения (4.168).

4.53. Найдите условия устойчивости разностной схемы, полученной при решении одномерного линейного уравнения Бюргерса методом ВВЦП.

4.54. Найдите условия устойчивости схемы с разностями против потока (4.186).

4.55. Используя метод ВВЦП для решения линейного уравнения Бюргерса с начальным условием $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, и граничными условиями $u(0, t) = 100$, $u(1, t) = 0$ на разностной сетке, состоящей из 21 узла, найдите стационарное решение при следующих значениях параметров:

- (a) $r = 0.50$, $v = 0.25$;
- (b) $r = 0.50$, $v = 1.00$;
- (c) $r = 0.10$, $v = 0.40$;
- (d) $r = 0.05$, $v = 0.50$

и сопоставьте результаты численных расчетов с точным решением.

4.56. Повторите задачу 4.55, используя схему (4.188).

4.57. Повторите задачу 4.55, используя схему «чехарда» Дюфорта — Франкела.

4.58. Повторите задачу 4.55, используя схему Аллена — Чена.

4.59. Определите методом Неймана условия устойчивости разностной схемы (4.188).

4.60. Найдите модифицированное уравнение для схемы Аллена — Чена, сохранив члены до u_{xxx} включительно.

4.61. Используйте схему Браиловской для решения линейного уравнения Бюргерса на приведенной на рис. 3-4.7 сетке и покажите, что стационарное значение u при $j = 2$ равно

$$u_2^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^{n-i}} = \frac{3}{2}.$$

Граничные условия имеют вид $u_1^n = 3/2 = u_3^n$, а начальное условие имеет вид $u_2^1 = 1$. Для решения этой задачи использовать ЭВМ не надо.

4.62. Используйте схему Бима — Уорминга с аппроксимацией производных по времени неявным методом Эйлера для решения линейного уравнения Бюргера на сетке, изображенной на рис. 3-4.8. Определите стационарные

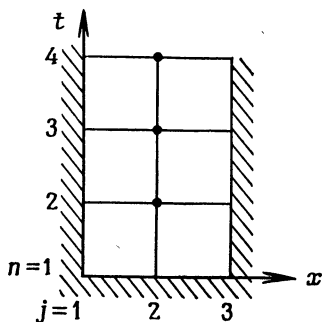


Рис. 3-4.7. $c = 1$ м/с, $\mu = 1/3$ м²/с, $\nu = 1$, $\Delta x = 1$ м.

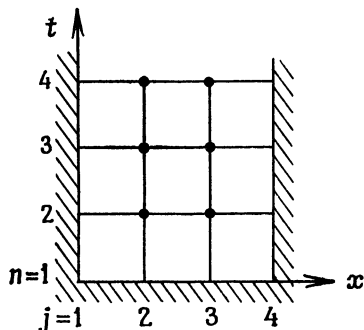


Рис. 3-4.8. $c = 2$ м/с, $\mu = 2$ м²/с, $\Delta x = 1$ м.

значения u при $j = 2$ и $j = 3$. Граничные условия имеют вид $u_1^n = 1$, $u_4^n = 4$, а начальные условия — вид $u_2^1 = 0 = u_3^1$. Для решения этой задачи использовать ЭВМ не надо.

4.63. Примените двухшаговую схему Лакса — Вендроффа к уравнению в частных производных

$$u_t + F_x - uu_{xxx} = 0,$$

где $F = F(u)$. Получите конечно-разностные уравнения.

4.64. Решите линейное уравнение Бюргера, используя (а) схему ВВЦП, (б) схему с разностями против потока (4.186), (с) схему Леонарда (4.188). Пусть задано начальное условие $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, а граничные условия имеют вид $u(0, t) = 100$, $u(1, t) = 0$. Расчет проведите на сетке, состоящей из 21 узла. Найдите стационарное решение при $\tau = 0.10$ и $\nu = 0.40$. Сопоставьте численное и точное решения.

4.65. Повторите задачу 4.64, используя следующие схемы: (а) схему «чхарда» Дюфорта — Франкела, (б) схему Аллена — Чена, (с) схему Мак-Кормака (4.198).

4.66. Повторите задачу 4.64, используя схему Брили — Макдональда с аппроксимацией производных по времени неявным методом Эйлера.

2

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К УРАВНЕНИЯМ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА

Глава 5

Основные уравнения механики жидкости и теплообмена

В этой главе речь пойдет об основных уравнениях механики жидкости и теплообмена (т. е. динамики жидкости). Мы полагаем, что читатель имеет некоторое начальное представление об обсуждаемых в данной главе вопросах, поэтому не приводим подробного вывода уравнений. Уравнения рассматриваются в порядке убывания сложности. В большинстве случаев приводятся только общепринятые формы записи. В последующих главах будут представлены другие формы записи основных уравнений динамики жидкости, специально упрощенные для целей вычислений. В эту главу включен также раздел, являющийся введением в моделирование турбулентности.

§ 5.1. Основные уравнения

Фундаментальные уравнения динамики жидкости основаны на универсальных законах сохранения: сохранения массы, сохранения количества движения и сохранения энергии. Уравнение, получающееся в результате применения закона сохранения массы к потоку жидкости, называется *уравнением неразрывности*. Закон сохранения количества движения — это второй закон Ньютона. Его применение к потоку жидкости дает векторное уравнение, известное как уравнение количества движения или как уравнение импульса. Закон сохранения энергии тождествен первому закону термодинамики и в динамике жидкости уравнение, являющееся его выражением, называется *уравнением энер-*

гидр. Для замыкания системы к уравнениям, полученным из упомянутых выше законов сохранения, следует добавить соотношения, устанавливающие связь между свойствами жидкости. Примером такого соотношения может быть уравнение состояния, связывающее термодинамические параметры жидкости: давление p , плотность ρ и температуру T .

Исторически сложились два подхода к получению уравнений динамики жидкости: феноменологический и использующий кинетическую теорию. В первом случае постулируются определенные соотношения между механическим напряжением и скоростью деформации, между потоком тепла и градиентом температуры, после чего уравнения динамики жидкости выводятся из законов сохранения. Требуемые константы пропорциональности между напряжением и скоростью деформации и между потоком тепла и градиентом температуры (называемые коэффициентами переноса) в этом подходе должны определяться экспериментальным путем. Во втором подходе (называемом еще математической теорией неоднородных газов) уравнения динамики жидкости получают с коэффициентами переноса, которые определяются в рамках некоторых интегральных соотношений, возникающих при рассмотрении динамики сталкивающихся частиц. Слабая сторона этого подхода состоит в том, что при вычислении интеграла столкновения необходимо определить силы взаимодействия между частицами. Таким образом, неопределенность феноменологического подхода, обусловленная экспериментом, сменяется неопределенностью математического свойства в кинетическом подходе. Эти два подхода приведут к одним и тем же уравнениям динамики жидкости, если при их выводе делаются равнозначные допущения.

Мы не будем здесь выводить основные уравнения динамики жидкости. Вывод вы найдете в монографиях Шлихтинга (феноменологический подход) [Schlichting, 1968] и Гиршфельдера (кинетическая теория) [Hirschfelder et al., 1954]. Мы же приведем уравнения для случая однородной жидкости без диффузии и химических реакций, протекающих с конечной скоростью. Для включения этих эффектов необходимо рассматривать уравнения неразрывности для каждой из компонент реагирующего газа, а в уравнение энергии добавить диффузионные члены. Подробные сведения о течениях с химическими реакциями можно найти в книге Дорранса [Dorrance, 1962].

5.1.1. Уравнение неразрывности

Применяя закон сохранения массы к жидкости, протекающей через фиксированный бесконечно малый контрольный объем

(рис. 5.1), получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (5.1)$$

где ρ — плотность жидкости, а \mathbf{V} — ее скорость. Первый член этого уравнения дает увеличение плотности в контрольном объеме за единицу времени, второй — поток массы через поверхность

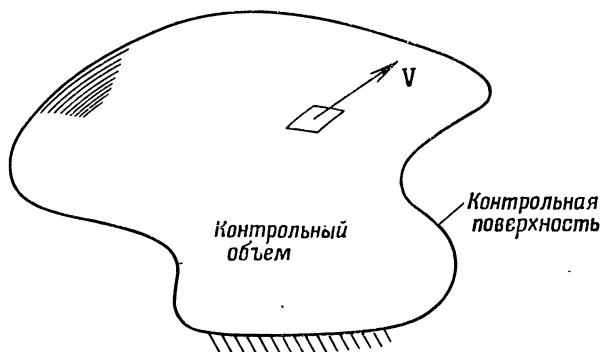


Рис. 5.1. Контрольный объем при использовании подхода Эйлера.

контрольного объема за единицу времени, отнесенный к единице объема. Удобно воспользоваться понятием субстанциональной производной

$$\frac{D(\quad)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla(\quad) \quad (5.2)$$

для преобразования уравнения (5.1) к виду

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.1) было выведено с использованием *подхода Эйлера*. В этом подходе фиксируется контрольный объем и рассматривается баланс жидкости, протекающий через его поверхность. В альтернативном *подходе Лагранжа* изменения свойств некоторого жидкого элемента фиксируются наблюдателем, движущимся вместе с этим элементом. Обычно в задачах механики жидкости подход Эйлера удобнее.

В декартовой системе координат, где u, v, w суть компоненты скорости по осям x, y, z , уравнение (5.1) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (5.4)$$

Заметим, что уравнение (5.4) записано в форме закона сохранения (дивергентной форме).

Жидкость, плотность которой остается постоянной, называется *несжимаемой*. Математически это означает, что

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (5.5)$$

Тогда уравнение (5.3) сводится к уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (5.6)$$

или для декартовой системы координат

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5.7)$$

Для воздуха при $V < 100$ м/с или $M < 0.3$ предположение о несжимаемости жидкости является хорошим приближением.

5.1.2. Уравнение количества движения

Применение второго закона Ньютона к жидкости, протекающей через бесконечно малый фиксированный контрольный объем, приводит к уравнению количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) + \nabla \cdot \rho\mathbf{V}\mathbf{V} = \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot \Pi_{ij}. \quad (5.8)$$

Первый член этого уравнения дает отнесенное к единичному объему изменение количества движения в контрольном объеме за единицу времени. Второй член есть отнесенное к единичному объему изменение количества движения в контрольном объеме за счет конвекции в единицу времени. Заметим, что $\rho\mathbf{V}\mathbf{V}$ — тензор, поэтому $\nabla \cdot \rho\mathbf{V}\mathbf{V}$ не есть просто дивергенция. Однако этот член можно разложить на два слагаемых:

$$\nabla \cdot \rho\mathbf{V}\mathbf{V} = \rho\mathbf{V} \cdot \nabla\mathbf{V} + \mathbf{V}(\nabla \cdot \rho\mathbf{V}). \quad (5.9)$$

Когда это выражение подставляется в уравнение (5.8), то с использованием уравнения неразрывности последнее упрощается и уравнение количества движения принимает вид

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot \Pi_{ij}. \quad (5.10)$$

Первый член в правой части уравнения (5.10) есть отнесенная к единице объема массовая сила. Массовые силы действуют на расстоянии и приложены ко всей массе тела. Чаще всего это — сила тяжести. Тогда сила \mathbf{f} , отнесенная к единичной массе, просто равна ускорению свободного падения \mathbf{g} :

$$\rho\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}. \quad (5.11)$$

Второй член в правой части уравнения (5.10) дает отнесенные к единице объема поверхностные силы. Эти силы суть механические напряжения, действующие на выделенный жидкий объем со стороны внешней по отношению к нему жидкости. Они образованы нормальными и сдвиговыми напряжениями и задаются компонентами тензора напряжений Π_{ij} .

Приведенное выше уравнение выписано для общего случая и пригодно как для течений с разрывами, так и без таковых. Но, как только для тензора напряжений мы принимаем какую-либо аппроксимацию, уравнение (5.8) теряет свою общность. Для всех газов, которые можно считать сплошной средой, и большинства жидкостей замечено, что напряжение в некоторой точке линейно зависит от скорости деформации жидкости. Такая жидкость называется *ньютоновской*. При этом допущении можно вывести [Schlichting, 1968] общий закон деформации, который связывает тензор напряжений с давлением и компонентами скорости. В тензорных обозначениях он записывается в виде

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \mu' \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (5.12)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$); u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора скорости \mathbf{V} ; x_1, x_2, x_3 — координаты радиус-вектора точки; μ — коэффициент динамической вязкости; μ' — второй коэффициент вязкости. Эти два коэффициента вязкости связаны с коэффициентом объемной вязкости κ выражением

$$\kappa = \frac{2}{3}\mu + \mu'. \quad (5.13)$$

Обычно коэффициент объемной вязкости полагают пренебрежимо малым, за исключением тех случаев, когда изучается структура ударных волн, а также поглощение и затухание акустических волн. Поэтому в дальнейшем мы будем им пренебрегать. При $\kappa = 0$ второй коэффициент вязкости станет равным

$$\mu' = -\frac{2}{3}\mu, \quad (5.14)$$

а тензор напряжений можно записать как

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right], \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (5.15)$$

Тензор напряжений разделяют часто на две части:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (5.16)$$

где τ_{ij} — тензор вязких напряжений, задаваемый выражением

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right], \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (5.17)$$

Подставляя (5.15) в (5.10), получаем известное уравнение Навье—Стокса

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho f - \nabla p + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]. \quad (5.18)$$

В декартовой системе координат имеем три скалярных уравнения Навье — Стокса:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Имея в виду (5.8), эти уравнения можно переписать в дивергентной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho uw - \tau_{xz}) &= \rho f_x, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho vw - \tau_{yz}) &= \rho f_y, \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uw - \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho vw - \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2 + p - \tau_{zz}) &= \rho f_z, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где компоненты тензора вязких напряжений задаются выражениями

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx}, \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau_{zx}, \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy}. \end{aligned}$$

Уравнения Навье—Стокса образуют ту базу, на основе которой была развита полная теория вязких течений. Строго говоря, термин уравнения Навье—Стокса относится к проекциям уравнений движения (5.18) на оси координат. Однако в систему уравнений Навье—Стокса включают еще и уравнения неразрывности и энергии.

Течение несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости μ описывается упрощенной формой уравнения (5.18), а именно

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (5.21)$$

Необходимо помнить, что уравнение (5.21) получено в предположении постоянной вязкости, которое может оказаться неоправданным для неизотермических течений, когда вязкость сильно зависит от температуры. С другой стороны, вязкость газов обнаруживает умеренную зависимость от температуры и уравнение (5.21) хорошо описывает течение несжимаемого газа.

5.1.3. Уравнение энергии

Применение первого закона термодинамики к жидкости, протекающей через бесконечно малый фиксированный объем, приводит к уравнению энергии такого вида

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \nabla \cdot E_t \mathbf{V} = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\Pi_{ij} \cdot \mathbf{V}), \quad (5.22)$$

где E_t — полная энергия единицы объема, задаваемая выражением

$$E_t = \rho \left(e + \frac{V^2}{2} + \text{потенциальная энергия} + \dots \right), \quad (5.23)$$

и e — внутренняя энергия единицы массы. Первый член в левой части уравнения (5.22) есть изменение полной энергии единицы контрольного объема в единицу времени, тогда как второй — изменение полной энергии за счет конвекции через контрольную поверхность (в единицу времени и отнесенная к единице объема). Первый член в правой части уравнения (5.22) есть скорость тепловыделения внешних источников, отнесенная к единице объема, а второй член $(\nabla \cdot \mathbf{q})$ — тепловые потери за счет теплопроводности через контрольную поверхность в единицу времени (отнесенные к единице объема). Закон Фурье для переноса энергии за счет теплопроводности гласит, что поток тепла выражается через градиент температуры следующим образом:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T, \quad (5.24)$$

где k — коэффициент теплопроводности и T — температура. Третий член в правой части (5.22) есть отнесенная к единице объема работа массовых сил, совершаемая над контрольным объемом. Четвертый — отнесенная к единичному объему работа поверхностных сил, совершаемая над контрольным объемом. Очевидно, что уравнение (5.22) есть просто первый закон термодинамики, записанный для контрольного объема, т. е. изменение энергии системы равно подводимому к системе теплу плюс совершаемая над системой работа массовых и поверхностных сил.

В декартовой системе координат уравнение (5.22) запишется в дивергентном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial t} - \rho(f_x u + f_y v + f_z w) + \\ + \frac{\partial}{\partial x}(E_t u + p u - u \tau_{xx} - v \tau_{xy} - w \tau_{xz} + q_x) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}(E_t v + p v - u \tau_{xy} - v \tau_{yy} - w \tau_{yz} + q_y) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}(E_t w + p w - u \tau_{xz} - v \tau_{yz} - w \tau_{zz} + q_z) = 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

С использованием уравнения неразрывности левую часть уравнения (5.22) можно заменить выражением

$$\rho \frac{D}{Dt}(E_t/\rho) = \frac{\partial E_t}{\partial t} + \nabla \cdot E_t \mathbf{V}, \quad (5.26)$$

которое тождественно следующему:

$$\rho \frac{D}{Dt}(E_t/\rho) = \rho \frac{De}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt}(\mathbf{V}^2/2), \quad (5.27)$$

если в качестве основных переменных в (5.23) рассматривать внутреннюю и кинетическую энергии. Образую скалярное произведение из векторного уравнения (5.10) и вектора \mathbf{V} , получим

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot \mathbf{V} = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla p \cdot \mathbf{V} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \cdot \mathbf{V}. \quad (5.28)$$

Комбинируя (5.26) — (5.28), получим еще одну полезную форму записи уравнения энергии

$$\rho \frac{De}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{ij} \cdot \mathbf{V}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \cdot \mathbf{V}. \quad (5.29)$$

Последние два члена этого уравнения могут быть объединены в один, так как

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{ij} \cdot \mathbf{V}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \cdot \mathbf{V}. \quad (5.30)$$

Его обычно называют *диссипативной функцией* Φ , которая есть тепловой эквивалент механической мощности, затрачиваемой в процессе деформации жидкости вследствие вязкости. После введения диссипативной функции уравнение (5.29) принимает вид

$$\rho \frac{De}{Dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi. \quad (5.31)$$

Вводя энтальпию

$$h = e + p/\rho \quad (5.32)$$

и используя уравнение неразрывности, перепишем (5.31) в виде

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi. \quad (5.33)$$

В декартовой системе координат диссипативная функция, которая всегда положительна, если $\mu' = -(2/3)\mu$, задается следующим выражением:

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (5.34)$$

Если жидкость несжимаемая и коэффициент теплопроводности постоянный, то (5.31) сводится к уравнению

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + k\nabla^2 T + \Phi. \quad (5.35)$$

5.1.4. Уравнение состояния

Для замыкания системы уравнений динамики жидкости необходимо установить связь между термодинамическими переменными p , ρ , T , e , h , а также соотношение между коэффициентами переноса μ , k и термодинамическими переменными p , ρ , T , e , h . Для примера рассмотрим течение сжимаемой жидкости без подвода тепла извне в отсутствие массовых сил. Воспользуемся уравнением неразрывности (5.4), тремя уравнениями движения (5.19) и уравнением энергии (5.25). Эти пять скалярных уравнений содержат семь неизвестных p , ρ , e , T , u , v , w при условии, что коэффициенты переноса μ , k можно связать с термодинамическими величинами из числа неизвестных. Очевидно, что для замыкания системы нам необходимы еще два уравнения. Их можно получить, устанавливая существующие соотношения между термодинамическими переменными. Соотношения такого рода известны как *уравнения состояния*. Как известно, локаль-

ное термодинамическое состояние системы определяется любыми двумя независимыми термодинамическими переменными при условии, что химический состав жидкости не меняется из-за диффузии или химических реакций. Так, если в примере за независимые переменные мы примем e и ρ , то нам потребуются уравнения состояния типа

$$p = p(e, \rho), \quad T = T(e, \rho). \quad (5.36)$$

Примером уравнения состояния является уравнение совершенного газа

$$p = \rho RT, \quad (5.37)$$

где R — газовая постоянная. Для совершенного газа имеются также следующие соотношения:

$$e = c_v T, \quad h = c_p T, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad (5.38)$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении и $\gamma = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей. Для воздуха в обычных условиях $R = 287 \text{ м}^2/\text{с}^2 \cdot \text{К}$ и $\gamma = 1.4$. Если в нашем примере жидкость есть совершенный газ, то соотношения (5.36) примут вид

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad T = \frac{(\gamma - 1)e}{R}. \quad (5.39)$$

Для жидкостей, которые нельзя считать совершенным газом, требуемые соотношения состояния могут быть заданы в виде таблиц, карт или графических зависимостей.

Зависимость коэффициентов вязкости и теплопроводности от термодинамических величин устанавливается при помощи кинетической теории. Формула Сазерленда есть пример такого соотношения

$$\mu = C_1 \frac{T^{3/2}}{T + C_2}, \quad (5.40)$$

где C_1 и C_2 — постоянные для данного газа. Для воздуха при умеренных температурах $C_1 = 1.458 \cdot 10^{-6} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \sqrt{\text{К}})$ и $C_2 = 110.4 \text{ К}$. Для определения коэффициента теплопроводности k по известному μ часто используется число Прандтля:

$$\text{Pr} = c_p \mu / k. \quad (5.41)$$

Это возможно, так как отношение $c_p/P\gamma$, возникающее в выражении

$$k = (c_p/P\gamma) \mu, \quad (5.42)$$

приблизительно постоянно для большинства газов. Для воздуха при обычных условиях $P\gamma = 0.72$.

5.1.5. Векторная форма записи уравнений

Перед составлением конечно-разностных схем часто бывает удобно записать уравнения динамики жидкости в компактной векторной форме. Например, уравнения Навье—Стокса для сжимаемого газа в случае отсутствия массовых сил и подвода тепла извне в декартовых координатах можно записать так:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = 0, \quad (5.43)$$

где векторы \mathbf{U} , \mathbf{E} , \mathbf{F} и \mathbf{G} задаются следующим образом:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho v w - \tau_{yz} \\ (E_t + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} + q_y \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ (E_t + p)w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} + q_z \end{bmatrix}.$$

Первая строка векторного уравнения (5.43) соответствует уравнению неразрывности в форме (5.4), вторая, третья и четвертая — уравнению движения (5.20), а пятая — уравнению энергии (5.25). С записанными в такой форме уравнениями Навье—Стокса зачастую легче работать при составлении конечно-раз-

ностных схем. Другие уравнения динамики жидкости, записанные в дивергентной форме, также могут быть представлены в векторной форме.

5.1.6. Безразмерный вид уравнений

Уравнения динамики жидкости часто приводят к безразмерному виду. Преимущество такой формы записи в том, что такие характеризующие течения параметры, как число Маха, число Рейнольдса, число Прандтля и другие, могут варьироваться независимым образом. К тому же после приведения уравнений к безразмерному виду параметры потока «нормализуются», так что их величины изменяются в обозначенных пределах, например между 0 и 1. Возможны разные процедуры обезразмеривания. Например,

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, & y^* &= \frac{y}{L}, & z^* &= \frac{z}{L}, & t^* &= \frac{t}{L/V_\infty}, \\ u^* &= \frac{u}{V_\infty}, & v^* &= \frac{v}{V_\infty}, & w^* &= \frac{w}{V_\infty}, & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_\infty}, \\ \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, & p^* &= \frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2}, & T^* &= \frac{T}{T_\infty}, & e^* &= \frac{e}{V_\infty^2}, \end{aligned}$$

где безразмерные переменные обозначены звездочкой, параметры невозмущенного потока — значком ∞ и L — характерная длина, входящая в безразмерный комплекс числа Рейнольдса

$$\text{Re}_L = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}.$$

Если эту процедуру применить к уравнениям Навье—Стокса для сжимаемого газа (5.43) и (5.44), то получим следующие безразмерные уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial z^*} = 0, \quad (5.45)$$

где

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \rho^* \\ \rho^* u^* \\ \rho^* v^* \\ \rho^* w^* \\ E_t^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}^* = \begin{bmatrix} \rho^* u^* \\ \rho^* u^{*2} + p^* - \tau_{xx}^* \\ \rho^* u^* v^* - \tau_{xy}^* \\ \rho^* u^* w^* - \tau_{xz}^* \\ (E_t^* + p^*) u^* - u^* \tau_{xx}^* - v^* \tau_{xy}^* - w^* \tau_{xz}^* + q_x^* \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} \rho^* v^* \\ \rho^* u^* v^* - \tau_{xy}^* \\ \rho^* v^{*2} + p^* - \tau_{yy}^* \\ \rho^* v^* w^* - \tau_{yz}^* \\ (E_t^* + p^*) v^* - u^* \tau_{xy}^* - v^* \tau_{yy}^* - w^* \tau_{yz}^* + q_y^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \rho^* w^* \\ \rho^* u^* w^* - \tau_{xz}^* \\ \rho^* v^* w^* - \tau_{yz}^* \\ \rho^* w^{*2} + p^* - \tau_{zz}^* \\ (E_t^* + p^*) w^* - u^* \tau_{xz}^* - v^* \tau_{yz}^* - w^* \tau_{zz}^* + q_z^* \end{bmatrix},$$

$$E_t^* = \rho^* \left(e^* + \frac{u^{*2} + v^{*2} + w^{*2}}{2} \right).$$

Компоненты тензора напряжений и вектора теплового потока в безразмерном виде суть

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^* &= \frac{2\mu^*}{3 \text{Re}_L} \left(2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right), \\ \tau_{yy}^* &= \frac{2\mu^*}{3 \text{Re}_L} \left(2 \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right), \\ \tau_{zz}^* &= \frac{2\mu^*}{3 \text{Re}_L} \left(2 \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right), \\ \tau_{xy}^* &= \frac{\mu^*}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right), \\ \tau_{xz}^* &= \frac{\mu^*}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right), \\ \tau_{yz}^* &= \frac{\mu^*}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right), \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$q_x^* = \frac{\mu^*}{(\gamma - 1) M_\infty^2 \text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial T^*}{\partial x^*},$$

$$q_y^* = \frac{\mu^*}{(\gamma - 1) M_\infty^2 \text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial T^*}{\partial y^*},$$

$$q_z^* = \frac{\mu^*}{(\gamma - 1) M_\infty^2 \text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial T^*}{\partial z^*},$$

где M_∞ — число Маха, посчитанное по параметрам невозмущенного потока

$$M_\infty = V_\infty / \sqrt{\gamma R T_\infty},$$

и уравнение состояния совершенного газа (5.39) приводится к виду

$$p^* = (\gamma - 1) \rho^* e^*, \quad T^* = \frac{\gamma M_\infty^2 \rho^*}{\rho^*}.$$

Заметим, что безразмерные уравнения (5.45) и (5.46) идентичны размерным уравнениям (5.43) и (5.44), если в записи уравнений опустить звездочку. Для сокращения записи звездочки в безразмерных уравнениях можно опускать, что обычно и делают.

5.1.7. Криволинейные ортогональные координаты

Уравнения динамики жидкости могут быть записаны в любой системе координат. Ранее мы выписали эти уравнения для декартовой системы координат. Во многих приложениях удобнее пользоваться какой-либо другой ортогональной системой координат. Определим криволинейную ортогональную систему координат общего вида x_1, x_2, x_3 , начало которой находится в точке P , и пусть i_1, i_2, i_3 — соответствующие единичные векторы (рис. 5.2). Координаты декартовой прямоугольной системы связаны с криволинейными координатами общего вида соотношениями

$$\begin{aligned} x &= x(x_1, x_2, x_3), \\ y &= y(x_1, x_2, x_3), \\ z &= z(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{5.48}$$

Если якобиан $\partial(x, y, z) / \partial(x_1, x_2, x_3)$ отличен от нуля, то

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x, y, z), \\ x_2 &= x_2(x, y, z), \\ x_3 &= x_3(x, y, z). \end{aligned} \tag{5.49}$$

Длина элемента дуги в декартовых координатах равна

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (5.50)$$

Если уравнения (5.48) продифференцировать и подставить в уравнение (5.50), то получим

$$(ds)^2 = (h_1 dx_1)^2 + (h_2 dx_2)^2 + (h_3 dx_3)^2, \quad (5.51)$$

где

$$(h_1)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2,$$

$$(h_2)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2,$$

$$(h_3)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2.$$

Пусть ϕ — произвольный скаляр, \mathbf{A} — произвольный вектор, тогда для градиента, дивергенции, вихря и оператора Лапласа

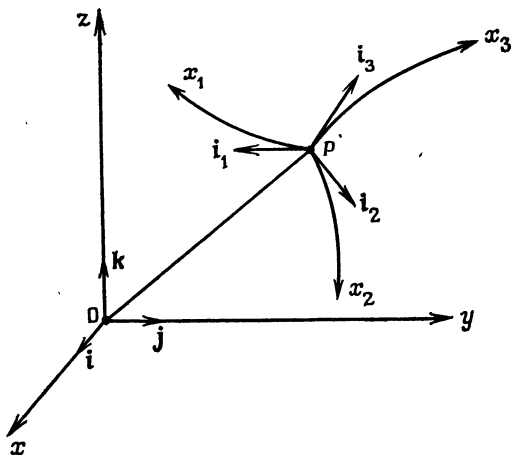


Рис. 5.2. Ортогональная криволинейная система координат.

в криволинейных координатах общего вида имеем следующие выражения:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \mathbf{i}_3, \quad (5.52)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right], \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 A_2) \right] \mathbf{i}_1 + \right. \\ & + h_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 A_3) \right] \mathbf{i}_2 + \\ & \left. + h_3 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 A_1) \right] \mathbf{i}_3 \right\}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Выражение $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$, входящее в член DV/Dt уравнения движения, можно представить в виде

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \left(\frac{u_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (u_1 \mathbf{i}_1 + u_2 \mathbf{i}_2 + u_3 \mathbf{i}_3),$$

где u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора \mathbf{V} по направлениям x_1, x_2, x_3 . Учитывая, что единичные векторы суть функции координат, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = & \left(\frac{u_1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{u_1 u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \right. \\ & + \left. \frac{u_1 u_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{u_2^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{u_3^2}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{i}_1 + \\ & + \left(\frac{u_1}{h_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{u_1^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \right. \\ & + \left. \frac{u_1 u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \frac{u_2 u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} - \frac{u_3^2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \right) \mathbf{i}_2 + \\ & + \left(\frac{u_1}{h_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{u_1^2}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \right. \\ & \left. - \frac{u_2^2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \frac{u_1 u_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{u_2 u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \right) \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений (5.15) можно выразить через координаты x_1, x_2, x_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{x_1 x_1} &= -p + \frac{2}{3} \mu (2e_{x_1 x_1} - e_{x_2 x_2} - e_{x_3 x_3}), \\ \Pi_{x_2 x_2} &= -p + \frac{2}{3} \mu (2e_{x_2 x_2} - e_{x_1 x_1} - e_{x_3 x_3}), \\ \Pi_{x_3 x_3} &= -p + \frac{2}{3} \mu (2e_{x_3 x_3} - e_{x_1 x_1} - e_{x_2 x_2}), \\ \Pi_{x_2 x_3} &= \Pi_{x_3 x_2} = \mu e_{x_2 x_3}, \\ \Pi_{x_1 x_3} &= \Pi_{x_3 x_1} = \mu e_{x_1 x_3}, \\ \Pi_{x_1 x_2} &= \Pi_{x_2 x_1} = \mu e_{x_1 x_2}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

где выражения для компонент тензора скоростей деформаций записываются в виде

$$\begin{aligned}
 e_{x_1 x_1} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3}, \\
 e_{x_2 x_2} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1}, \\
 e_{x_3 x_3} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{u_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{u_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2}, \\
 e_{x_2 x_3} &= \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_3}{h_3} \right) + \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{u_2}{h_3} \right), \\
 e_{x_1 x_3} &= \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) + \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_3}{h_3} \right), \\
 e_{x_1 x_2} &= \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right).
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

Компоненты $\nabla \cdot \Pi_{ij}$ суть

$$\begin{aligned}
 x_1: & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \Pi_{x_1 x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 \Pi_{x_1 x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_3 \Pi_{x_1 x_3}) \right] + \\
 & + \Pi_{x_1 x_2} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \Pi_{x_1 x_1} \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \Pi_{x_2 x_2} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \\
 & - \Pi_{x_3 x_3} \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1}, \\
 x_2: & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \Pi_{x_1 x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 \Pi_{x_2 x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \Pi_{x_2 x_3}) \right] + \\
 & + \Pi_{x_2 x_3} \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \Pi_{x_1 x_2} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \Pi_{x_3 x_3} \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \\
 & - \Pi_{x_1 x_1} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2}, \\
 x_3: & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \Pi_{x_1 x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 \Pi_{x_2 x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \Pi_{x_3 x_3}) \right] + \\
 & + \Pi_{x_3 x_3} \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \Pi_{x_2 x_3} \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \Pi_{x_1 x_1} \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \\
 & - \Pi_{x_2 x_2} \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3}.
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

В криволинейных координатах диссипативная функция принимает вид

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \mu \left[2 (e_{x_1 x_1}^2 + e_{x_2 x_2}^2 + e_{x_3 x_3}^2) + e_{x_2 x_1}^2 + e_{x_1 x_2}^2 + e_{x_3 x_2}^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{3} (e_{x_1 x_1} + e_{x_2 x_2} + e_{x_3 x_3})^2 \right].
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

Все выписанные выше формулы можно использовать для получения уравнений динамики жидкости в любой криволинейной ортогональной системе координат. Ниже приведено несколько таких примеров.

1. Декартовы координаты

$$x_1 = x, \quad h_1 = 1, \quad u_1 = u,$$

$$x_2 = y, \quad h_2 = 1, \quad u_2 = v,$$

$$x_3 = z, \quad h_3 = 1, \quad u_3 = w.$$

2. Цилиндрические координаты

$$x_1 = r, \quad h_1 = 1, \quad u_1 = u_r,$$

$$x_2 = \theta, \quad h_2 = r, \quad u_2 = u_\theta,$$

$$x_3 = z, \quad h_3 = 1, \quad u_3 = u_z.$$

3. Сферические координаты

$$x_1 = r, \quad h_1 = 1, \quad u_1 = u_r,$$

$$x_2 = \theta, \quad h_2 = r, \quad u_2 = u_\theta,$$

$$x_3 = \phi, \quad h_3 = r \sin \theta, \quad u_3 = u_\phi.$$

4. Двумерные осесимметричные связанные с поверхностью тела координаты

$$x_1 = \xi, \quad h_1 = 1 + K(\xi)\eta, \quad u_1 = u,$$

$$x_2 = \eta, \quad h_2 = 1, \quad u_2 = v,$$

$$x_3 = \phi, \quad h_3 = [r(\xi) + \eta \cos \alpha(\xi)]^m, \quad u_3 = w = 0,$$

где $K(\xi)$ — локальная кривизна поверхности тела, $r(\xi)$ — радиус цилиндра (рис. 5.3) и

$$m = \begin{cases} 0 & \text{для двумерного течения,} \\ 1 & \text{для осесимметричного течения.} \end{cases}$$

§ 5.2. Уравнения Рейнольдса для турбулентных течений

5.2.1. История вопроса

Более пятидесяти лет тому назад стало понятно, что наши знания о турбулентности далеки от полноты. Датированное 1932 годом высказывание Г. Ламба остается актуальным и поныне: «Я старый человек и, когда после смерти попаду на небеса, то спрошу у Всевышнего две вещи: что такое квантовая электродинамика и что такое турбулентность. В отношении первого я настроен более оптимистически».

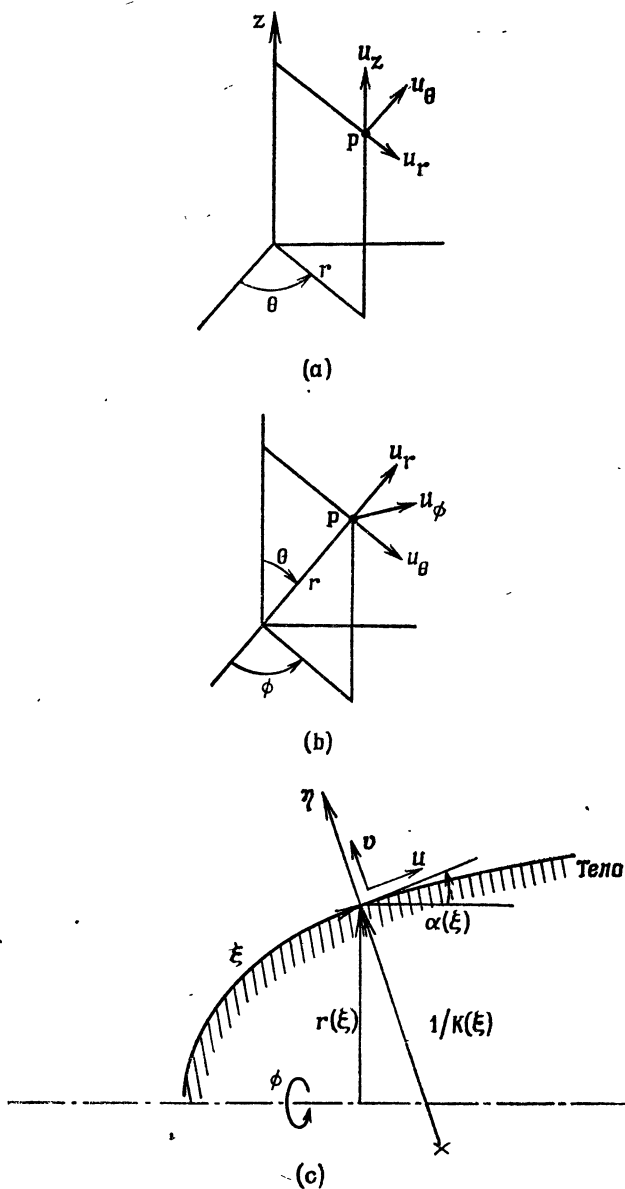


Рис. 5.3. Криволинейные системы координат. (а) Цилиндрические координаты (r, θ, z) ; (б) сферические координаты (r, θ, ϕ) ; (с) связанные с поверхностью тела координаты в двумерном или осесимметричном случае (ξ, η, ϕ) .

Приведем цитату из классической работы Хинце [Hinze, 1975]: «Турбулентное течение жидкости есть форма нерегулярного ее движения, в котором параметры потока изменяются случайным образом во времени и пространстве вокруг некоторых своих средних значений».

Все мы знакомы с различиями между ламинарным и турбулентным течениями. Обычно в турбулентном потоке происходит большее падение давления и наблюдается большее трение. Скорость диффузии некоторой скалярной величины, как правило, больше в турбулентном потоке (большее «перемешивание») и в турбулентных потоках более сильный шум. Турбулентный пограничный слой до отрыва способен преодолевать более протяженную область с положительным градиентом давления, нежели ламинарный пограничный слой. Игроки в гольф, использующие пупырчатые мячи, хорошо знают это.

Считается, что нестационарные уравнения Навье—Стокса полностью описывают турбулентные течения. Если это так, то интересно знать, почему нельзя рассчитывать на ЭВМ турбулентные течения столь же эффективным образом, как и ламинарные. Ведь тогда можно было бы раз и навсегда демонтировать аэродинамические трубы. Дело в том, что временной и пространственный масштабы турбулентного движения столь малы, что требуемое количество узлов расчетной сетки и малый размер шагов по времени делают эти вычисления практически нереализуемыми на современных ЭВМ ввиду ограниченности ресурсов последних. Хотя оценки разных авторов и различаются, но считается, что требуется по крайней мере 10 узлов сетки для разрешения движения турбулентного вихря. Масштаб самых мелких вихрей обычно в 1000 раз меньше размера области течения вдоль твердой поверхности. Для типичных течений может потребоваться 10^5 точек для разрешения области течения объемом 1 см^3 .

Авторитеты расходятся во мнениях, когда компьютерная технология достигнет в своем развитии этапа, на котором расчеты турбулентных течений станет возможным проводить «в лоб». Некоторые считают, что никогда не удастся рассчитать мелко-масштабную структуру турбулентности на основе нестационарных уравнений Навье—Стокса в задачах, представляющих практический интерес. Вероятно, что еще до конца нынешнего столетия наиболее развитый подход будет включать в себя решение зависящих от времени уравнений Навье—Стокса для больших вихрей, ответственных за большую часть переноса импульса, и моделирование самых малых вихрей (субсеточный масштаб). Этот подход называют обычно *моделированием крупных вихрей*. В работе Чепмена [Chapman, 1979] имеются инте-

ресные соображения о перспективах численного моделирования в задачах аэродинамики.

В настоящее время основное направление численных методов расчета турбулентных течений состоит в решении осредненных уравнений Навье — Стокса. Эти уравнения называют также *уравнениями Рейнольдса*. При осреднении по времени в уравнениях возникают новые члены, которые можно интерпретировать как градиенты «кажущихся» (добавочных) напряжений и тепловых потоков, связанных с турбулентным движением. Эти новые величины должны быть связаны с характеристиками осредненного течения посредством моделей турбулентности, что приводит к новым гипотезам и аппроксимациям. Таким образом, уравнения Рейнольдса не вытекают полностью из основополагающих принципов, так как для замыкания системы уравнений привлекаются дополнительные гипотезы.

Уравнения Рейнольдса получают разложением независимых переменных в уравнениях сохранения на осредненные по времени величины, полученные на соответствующем интервале времени, и пульсационные компоненты и последующим осреднением по времени всего уравнения. В настоящее время используются два способа осреднения — классическое осреднение по Рейнольдсу и предложенное Фавром [Favre, 1965] осреднение с использованием плотности в качестве весовой функции. Для течений, в которых флуктуациями плотности можно пренебречь, оба способа эквивалентны.

5.2.2. Процедуры осреднения

В обычной процедуре осреднения, следуя Рейнольдсу, определим осредненную по времени величину \bar{f} в виде

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f dt. \quad (5.60)$$

Потребуем, чтобы Δt было велико по сравнению с периодом турбулентных пульсаций, но мало по сравнению с постоянной времени для любого медленного изменения поля течения, обусловленного обычной нестационарностью течения. Иногда говорят, что Δt должно стремиться к бесконечности, но это следует интерпретировать только в сравнении с периодом пульсаций, характерных для турбулентности. В реальных измерениях Δt должно быть конечно.

В процедуре осреднения по Рейнольдсу случайно изменяющиеся величины заменяются на осредненные по времени плюс

пульсации вокруг этих средних значений (рис. 5.4). Для декартовой системы координат можно записать

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u', & v &= \bar{v} + v', & w &= \bar{w} + w', & \rho &= \bar{\rho} + \rho', \\ p &= \bar{p} + p', & h &= \bar{h} + h', & T &= \bar{T} + T', & H &= \bar{H} + H', \end{aligned} \quad (5.61)$$

где полная энтальпия H определена как $H = h + u_i u_i / 2$. Пульсации таких величин, как вязкость, теплопроводность и удельная теплоемкость, обычно малы, и здесь ими будем пренебрегать.

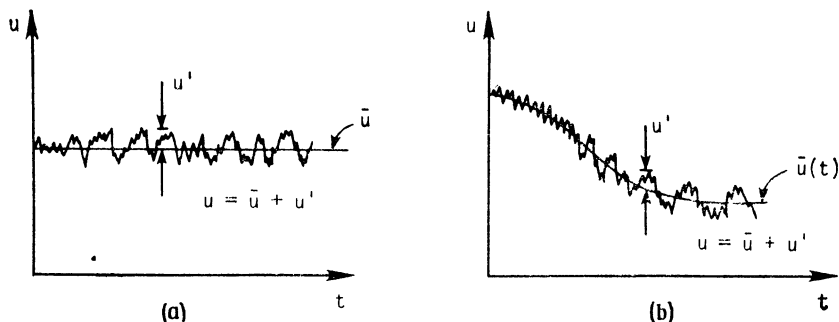


Рис. 5.4. Связь между u , \bar{u} и u' . (а) Стационарное течение; (б) нестационарное течение.

По определению осреднение пульсационной составляющей дает нуль:

$$\bar{f}' = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f' dt \equiv 0. \quad (5.62)$$

Ясно, что при осреднении величин f и g имеют место следующие соотношения:

$$\overline{f'g'} = 0, \quad \overline{f'g} = \bar{f}'\bar{g}, \quad \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}. \quad (5.63)$$

Также ясно, что если $\bar{f}' = 0$, то осреднение произведения двух флуктуирующих величин дает обычно отличную от нуля величину, т. е. $\overline{f'f'} \neq 0$. И на самом деле среднеквадратичная величина пульсаций скорости известна как интенсивность турбулентности.

При рассмотрении течений сжимаемого газа или смесей газов принято пользоваться процедурой осреднения с весовой функцией (плотностью). При этом осредненные величины

определяются как $\bar{f} = \overline{\rho f / \rho}$, т. е.

$$\bar{u} = \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}}, \quad \bar{v} = \frac{\overline{\rho v}}{\bar{\rho}}, \quad \bar{w} = \frac{\overline{\rho w}}{\bar{\rho}}, \quad \bar{h} = \frac{\overline{\rho h}}{\bar{\rho}}, \quad \bar{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\bar{\rho}}, \quad \bar{H} = \frac{\overline{\rho H}}{\bar{\rho}}. \tag{5.64}$$

Отметим, что так осредняются только компоненты скорости и тепловые переменные. Плотность и давление осредняются прежним образом.

Перед подстановкой в уравнения определим новые изменяющиеся величины

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u'', & v &= \bar{v} + v'', & w &= \bar{w} + w', \\ h &= \bar{h} + h'', & T &= \bar{T} + T'', & H &= \bar{H} + H''. \end{aligned} \tag{5.65}$$

Заметим, что осредненные по времени пульсации с двумя штрихами (u'' , v'' и т. д.) в общем случае отличным от нуля, если только $\rho' \neq 0$. В самом деле, можно показать, что $\overline{u''} = -\overline{\rho' u' / \rho}$, $\overline{v''} = -\overline{\rho' v' / \rho}$ и т. д. Зато среднее по времени от произведения пульсации с двумя штрихами и плотности равно нулю:

$$\overline{\rho f''} = 0. \tag{5.66}$$

Это можно легко показать, раскладывая $\overline{\rho f} = \overline{\rho(\bar{f} + f'')}$ и используя определение \bar{f} .

5.2.3. Уравнение неразрывности в форме Рейнольдса

Начнем с уравнения неразрывности, записанного в декартовой системе координат. Сначала представим все переменные в виде суммы осредненных по времени величин и пульсаций [уравнение (5.61)].

После осреднения по времени всего уравнения с учетом соглашения о суммировании имеем

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho'}{\partial t}}_0 + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \bar{u}_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\underbrace{\overline{\rho' \bar{u}_j}}_0) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\underbrace{\overline{\rho \bar{u}'_j}}_0) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\underbrace{\overline{\rho' \bar{u}'_j}}_0) = 0. \tag{5.67}$$

Три члена равны нулю в соответствии с тождеством (5.62). Итак, уравнение неразрывности в форме Рейнольдса при осреднении переменных обычным способом имеет вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \bar{u}_j} + \overline{\rho' \bar{u}'_j}) = 0. \tag{5.68}$$

Производя в уравнении (5.4) замену переменных на осредненные с весами переменные плюс пульсации с двумя штри-

хами в соответствии с уравнением (5.65) и осредняя по времени полученное уравнение, получим

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial t}}_0 + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{(\rho' \bar{u}_j)}_0 + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j'') + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho' u_j'') = 0. \quad (5.69)$$

Два члена этого уравнения тождественно обращаются в нуль. Кроме этого, два последних члена можно объединить в один, который будет равен нулю в соответствии с равенством (5.66):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j'') + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho' u_j'') = \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} u_j''.$$

Это позволяет записать уравнение неразрывности для осредненных с весами переменных в виде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) = 0. \quad (5.70)$$

Эта запись более компактна, чем уравнение (5.68). В случае несжимаемой жидкости $\rho' = 0$ и различие между переменными, осредненными обычным способом и с весами, пропадает, тогда

$$\partial \bar{u}_j / \partial x_j = 0. \quad (5.71)$$

5.2.4. Уравнения движения в форме Рейнольдса

Уравнения движения в форме Рейнольдса получаются наиболее просто, если исходить из уравнений Навье — Стокса, записанных в дивергентной форме (5.20). Заменим в (5.20) зависимые переменные на осредненные по времени значения плюс пульсации в соответствии с (5.61). Рассмотрим, например, проекцию уравнения (5.20) на направление x , пренебрегая массовыми силами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')] + \frac{\partial}{\partial x} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')] + \\ + (\bar{\rho} + \rho') - \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')(\bar{v} + v') - \tau_{yx}] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')(\bar{w} + w') - \tau_{zx}] = 0. \end{aligned}$$

Затем все уравнение осредняется. Линейные относительно пульсаций члены при осреднении по времени обращаются в нуль, как и в случае уравнения неразрывности. Таким путем мы избавляемся от нескольких членов, некоторые другие группируются и обращаются в нуль с учетом уравнения неразрывности,

В результате проекцию уравнения движения в форме Рейнольдса на направление x можно записать

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\bar{u} + \overline{\rho'u'}) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}\bar{u}\bar{u} + \bar{u}\overline{\rho'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} + \bar{u}\overline{\rho'v'}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho}\bar{u}\bar{w} + \bar{u}\overline{\rho'w'}) = \\ & = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_k} \right) - \bar{u}\overline{\rho'u'} - \bar{\rho}\overline{u'u'} - \overline{\rho'u'u'} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} \right) - \bar{v}\overline{\rho'u'} - \bar{\rho}\overline{u'v'} - \overline{\rho'u'v'} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial x} \right) - \bar{w}\overline{\rho'u'} - \bar{\rho}\overline{u'w'} - \overline{\rho'u'w'} \right]. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Полностью (все три компонента) уравнения движения в форме Рейнольдса могут быть записаны как

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\bar{u}_i + \overline{\rho'u'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_j + \bar{u}_i\overline{\rho'u'_j}) = \\ & = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \bar{u}_j\overline{\rho'u'_i}) - \bar{\rho}\overline{u'_i u'_j} - \overline{\rho'u'_i u'_j}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

где

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_k} \right]. \quad (5.74)$$

Чтобы получить уравнение движения в форме Рейнольдса для осредненных с плотностью в качестве весовой функции переменных, воспользуемся разложением (5.64) для представления мгновенных значений переменных. Для примера рассмотрим x -проекцию уравнения (5.20):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u'')] + \frac{\partial}{\partial x} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u'')(\bar{u} + u'')] + \\ & + (\bar{p} + p') - \tau_{xx}] + \frac{\partial}{\partial y} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u'')(\bar{v} + v'') - \tau_{yx}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u'')(\bar{w} + w'') - \tau_{zx}] = 0. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Затем уравнение осредняется по времени с использованием тождества (5.66), что приводит к уменьшению количества членов в нем. Уравнения движения в форме Рейнольдса для всех трех проекций будут выглядеть так:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_j) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j}). \quad (5.76)$$

Пренебрегая пульсациями вязкости, для $\bar{\tau}_{ij}$ получим

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{ij} = & \mu \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right] + \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial u''_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u''_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u''_k}{\partial x_k} \right]. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Вид уравнения движения при осреднении с весами проще, чем при обычном осреднении. Заметим, однако, что, даже если пренебрегать пульсациями вязкости, выражение для $\bar{\tau}_{ij}$ (5.74) проще в случае обычного осреднения (5.77). На практике вязкие члены, включающие помеченные двумя штрихами пульсации, считаются малыми, и ими можно пренебречь при оценке порядков величин.

Для несжимаемой жидкости уравнение движения можно записать в более простой форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j}), \quad (5.78)$$

где $\bar{\tau}_{ij}$ вычисляется по упрощенной формуле:

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.79)$$

Как и в случае уравнения неразрывности, здесь уже нет различия между способами осреднения переменных (обычное осреднение и осреднение с весовой функцией).

5.2.5. Уравнения энергии в форме Рейнольдса

Тепловые параметры H , h , T связаны друг с другом, и уравнение энергии принимает различный вид в зависимости от того, какой из них считается независимой величиной. Чтобы получить общее выражение, начнем с уравнения энергии в виде (5.22). Членом $\partial Q / \partial t$, связанным с тепловыделением внешних источников, будем пренебрегать. Полагая, что полная энергия состоит из внутренней и кинетической энергий, и заменяя E_t на $\rho H - p$, можно переписать (5.22) с учетом суммирования по повторяющимся индексам:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho H + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j H + q_j - u_i \tau_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (5.80)$$

Чтобы получить уравнение Рейнольдса для энергии при обычном осреднении величин, заменим мгновенные значения величин

в уравнении (5.80) на суммы (5.61). После осреднения по времени имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\bar{H} + \overline{\rho'H'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho}\bar{u}_j\bar{H} + \overline{\rho'u'_jH'} + \overline{\rho'u'_jH'} + \overline{\rho'u'_jH'} + \right. \\ \left. + \bar{u}_j\overline{\rho'H'} - k\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_j} \right) = \\ = \frac{\partial\bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{u}_i \left(-\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_k} \right) + \mu\bar{u}_i \left(\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\overline{u'_i\frac{\partial u'_k}{\partial x_k}} + \mu \left(\overline{u'_i\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \overline{u'_i\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) \right]. \quad (5.81) \end{aligned}$$

Часто желательно иметь в уравнении энергии в качестве независимой величины статическую температуру. Положим $h = c_p T$ и запишем уравнение (5.33) в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_p u_j T - k \frac{\partial T}{\partial x_j}) = \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \Phi. \quad (5.82)$$

Диссипативную функцию Φ можно выразить через компоненты скоростей:

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mu \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right]. \quad (5.83)$$

Переменные в уравнении (5.82) представляются в виде суммы (5.61) и получаемое уравнение осредняется. С учетом обращения в нуль некоторых членов уравнение энергии в форме Рейнольдса принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (c_p \bar{\rho}\bar{T} + c_p \overline{\rho'T'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}c_p \bar{T}\bar{u}_j) = \frac{\partial\bar{p}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial\bar{T}}{\partial x_j} - \bar{\rho}c_p \overline{T'u'_j} - c_p \overline{\rho'T'u'_j} \right) + \bar{\Phi}, \quad (5.84) \end{aligned}$$

где

$$\bar{\Phi} = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}. \quad (5.85)$$

В уравнении (5.85) $\bar{\tau}_{ij}$ следует рассчитывать по формуле (5.74).

Чтобы получить уравнение энергии в форме Рейнольдса при осреднении с весами, заменим переменные в уравнении (5.80) разложением (5.64), а затем произведем осреднение по времени.

Результат можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{H}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{H} + \overline{\rho u_j'' H''} - k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}) = \\ = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{\tau}_{ij} + \overline{u_j'' \tau_{ij}}), \end{aligned} \quad (5.86)$$

где $\bar{\tau}_{ij}$ задается формулой (5.77).

Уравнение Рейнольдса (5.86) можно переписать для статической температуры

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} c_p \tilde{T}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} c_p \tilde{T} \tilde{u}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j'' \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + k \frac{\partial \bar{T}''}{\partial x_j} - c_p \overline{\rho T'' u_j''} \right) + \bar{\Phi}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

где

$$\bar{\Phi} = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}. \quad (5.88)$$

В несжимаемой жидкости уравнение энергии для полной энтальпии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{H}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u_j \bar{H} + \overline{\rho u_j'' H''} - k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}) = \\ = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \tilde{u}_i \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\overline{u_j'' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.89)$$

и для статической температуры — вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} c_p \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} c_p \bar{T} \tilde{u}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \overline{\rho c_p T'' u_j''} \right) + \bar{\Phi}, \end{aligned} \quad (5.90)$$

где диссипативная функция $\bar{\Phi}$ упрощается вследствие обращения в нуль члена, являющегося объемным расширением жидкости, в выражении для $\bar{\tau}_{ij}$.

5.2.6. Замечания к уравнениям Рейнольдса

На первый взгляд уравнения Рейнольдса выглядят довольно сложно, и мы вправе задаться вопросом, продвинулись ли мы вперед по пути решения практических задач расчета турбулентных течений. Главная трудность в задачах механики жидкости состоит в том, что мы имеем большее число уравнений, чем можно решить. К счастью, для многих практически важных течений уравнения Рейнольдса можно упростить. Прежде чем заняться

упрощением, продолжим дальнейшее рассмотрение уравнений Рейнольдса.

Обратимся к рассмотрению турбулентного течения несжимаемой жидкости и дадим интерпретацию членов уравнения движения в форме Рейнольдса (5.78). Это уравнение описывает осредненное по времени течение жидкости и наряду с обычными членами, описывающими перенос импульса и ламинарноподобные напряжения, имеет ряд новых членов с пульсациями величин, которые и представляют кажущиеся турбулентные напряжения. Эти кажущиеся турбулентные напряжения возникают в уравнении Навье — Стокса в членах, которые дают перенос импульса. Другими словами, уравнение осредненного движения связывает ускорение жидкой частицы с градиентами напряжений. Так как известно выражение для ускорения частицы в осредненном движении, то все новое в этом уравнении должно возникать в градиентах напряжений, обусловленных турбулентным движением. Чтобы показать это, воспользуемся уравнением неразрывности для преобразования уравнения (5.78) к виду

$$\rho \frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij})_{\text{lam}}}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij})_{\text{turb}}}{\partial x_j}, \quad (5.91)$$

где член слева описывает ускорение частицы в осредненном движении, первый справа — средний градиент давления, второй — ламинарноподобные градиенты напряжений для осредненного движения, третий — градиенты кажущихся напряжений, обусловленные переносом импульса турбулентными пульсациями; $(\bar{\tau}_{ij})_{\text{lam}}$ то же, что и в уравнении (5.79), и имеет в переменных осредненных скоростей тот же вид, что и тензор напряжений для ламинарного течения несжимаемой жидкости. Кажущиеся турбулентные напряжения можно записать как

$$(\bar{\tau}_{ij})_{\text{turb}} = -\rho \overline{u'_i u'_j}. \quad (5.92)$$

Часто их называют *напряжениями Рейнольдса*.

Для турбулентного течения сжимаемой жидкости согласование членов, соответствующих ускорению осредненного движения, с кажущимися напряжениями превращается в трудную задачу. При использовании обычной процедуры осреднения наличие членов, подобных $\overline{\rho' u'_i}$, может давать поток через поверхность, образованную линиями тока осредненного течения, что не позволяет отнести члены уравнения к той или иной категории. Осреднение с «весами» обращает в нуль члены $\overline{\rho' u'_i}$ и дает компактное выражение для ускорения частицы, но затрудняет разделение напряжений на чисто ламинарные и кажущиеся турбулентные.

При обычном осреднении пульсационные компоненты $\bar{\tau}_{ij}$ пропадают. Этого не происходит при осреднении, «взвешенном» по плотности. Чтобы показать это, преобразуем (5.76) с использованием уравнения неразрывности к виду с полной производной в левой части и указанием происхождения членов уравнения:

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij})_{\text{lam}}}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij})_{\text{turb}}}{\partial x_j}, \quad (5.93a)$$

где интерпретацию членов слева и первого и второго справа см. в тексте за уравнением (5.91), а третий член справа описывает градиенты кажущихся напряжений, обусловленные турбулентными пульсациями и деформациями вследствие этих пульсаций. Уравнение (5.93a) полностью идентично уравнению (5.91) с той лишь разницей, что вместо \bar{u}_i в нем фигурирует \bar{u}_i . Если предположить, что $(\bar{\tau}_{ij})_{\text{lam}}$ имеет тот же вид, что и для ламинарного течения, то вторая половина выражения для $\bar{\tau}_{ij}$ в (5.77) должна быть отнесена к турбулентному переносу, что в результате дает

$$(\bar{\tau}_{ij})_{\text{lam}} = \mu \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right], \quad (5.93b)$$

$$(\bar{\tau}_{ij})_{\text{turb}} = -\overline{\rho u_i'' u_j''} + \mu \left[\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k''}{\partial x_k} \right]. \quad (5.93c)$$

Как и прежде, при выводе (5.93a) мы пренебрегали пульсациями вязкости. Второй член в выражении для $(\bar{\tau}_{ij})_{\text{turb}}$, связанный с молекулярной вязкостью, обычно полагают малым по сравнению с членом $-\overline{\rho u_i'' u_j''}$.

Подобный анализ мы можем выполнить для уравнения энергии в форме Рейнольдса и идентифицировать некоторые члены, куда входят пульсации температуры или энтальпии как кажущиеся тепловые потоки. Например, в уравнении (5.84) молекулярный ламинарноподобный тепловой поток есть

$$-(\nabla \cdot \mathbf{q})_{\text{lam}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \quad (5.94a)$$

и кажущийся турбулентный тепловой поток есть

$$-(\nabla \cdot \mathbf{q})_{\text{turb}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\bar{\rho} c_p \overline{T' u_j'} - c_p \overline{\rho' T' u_j'} \right). \quad (5.94b)$$

Другие примеры рейнольдсовых напряжений и тепловых потоков будут приведены в разделах, в которых будут рассмотрены более простые формы уравнений Рейнольдса.

Уравнения Рейнольдса не могут быть решены в том виде, в каком они приведены выше, так как кажущиеся турбулентные

напряжения и тепловые потоки следует считать новыми неизвестными. Необходимо установить дополнительные уравнения для этих новых неизвестных или принять какие-то допущения о связи между кажущимися турбулентными величинами и параметрами осредненного потока. Эта процедура известна как задача замыкания, которая будет рассматриваться в моделях турбулентности, обсуждаемых в § 5.4.

§ 5.3. Уравнения пограничного слоя

5.3.1. Некоторые предварительные соображения

Понятие пограничного слоя ввел в 1904 г. Людвиг Прандтль [Prandtl, 1926]. Он исходил из экспериментального наблюдения, что в достаточно большом диапазоне чисел Рейнольдса вблизи твердой стенки имеется тонкий слой, в котором вязкие эффекты столь же существенны, как и инерционные, какой бы малой ни была вязкость. Прандтль пришел к выводу, что можно использовать упрощенные уравнения при соблюдении двух условий: вязкий слой размером δ должен быть тонким по сравнению с характерным размером L тела вдоль по потоку ($\delta/L \ll 1$) и главный вязкий член должен иметь тот же порядок величины, что и любой из инерционных членов. Он воспользовался оценкой по порядку величины для уменьшения числа основных уравнений. Главные выводы заключаются в том, что вторыми производными скоростей в продольном направлении можно пренебречь по сравнению с соответствующими производными в поперечном направлении и можно вообще не рассматривать уравнение движения в поперечном направлении.

Аналогичное упрощение может быть произведено и для других течений, в которых можно выделить преимущественное направление. Это — струи, следы, слои смещения, развивающиеся течения в трубах и других каналах. Поэтому термины *пограничный слой* и *приближение пограничного слоя* трактуются в более широком смысле, что позволяет относить их к условиям, когда можно вообще не рассматривать уравнение движения в поперечном направлении и в оставшемся уравнении (или уравнениях в трехмерном случае) можно пренебречь членом со второй производной в продольном направлении. В этом более широком смысле эти упрощенные уравнения называются уравнениями тонкого сдвигового слоя. Данный термин кажется более подходящим, особенно для уравнений, описывающих свободные сдвиговые течения, такие, как струи и следы, а также течения вдоль твердых границ. Мы будем использовать оба термина, *пограничный слой* и *тонкий сдвиговый слой*, не делая различия между ними.

5.3.2. Приближение пограничного слоя для стационарного течения несжимаемой жидкости

Методику, используемую для получения приближения пограничного слоя для уравнений Навье—Стокса и Рейнольдса, удобно продемонстрировать на примере стационарного двумерного течения несжимаемой жидкости с постоянными свойствами вдоль изотермической поверхности с температурой T_w . Прежде всего определим безразмерные переменные

$$u^* = \frac{u}{u_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{u_\infty}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2},$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (5.95)$$

и введем их в уравнения Навье—Стокса. В результате получим

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \quad (5.96)$$

Уравнение движения по оси x

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^{*2}}{\partial y^{*2}} \right). \quad (5.97)$$

Уравнение движения по оси y

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^{*2}}{\partial y^{*2}} \right). \quad (5.98)$$

Уравнение энергии

$$u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \right) + \text{Ec} \left(u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) +$$

$$+ \frac{\text{Ec}}{\text{Re}_L} \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right], \quad (5.99)$$

где $\text{Re}_L = (\rho u_\infty L) / \mu$ — число Рейнольдса; $\text{Pr} = c_p \mu / k$ — число Прандтля; $\text{Ec} = 2(T_0 - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$ — число Эккерта; u_∞ , T_∞ — скорость и температура невозмущенного потока соответственно, а T_0 — температура заторможенного потока. Произведение $\text{Re}_L \cdot \text{Pr}$ известно также как число Пекле Pe .

Следуя Прандтлю, предположим, что толщины динамического и теплового пограничных слоев малы по сравнению с характерной длиной в продольном направлении, т. е. $\delta/L \ll 1$ и $\delta_t/L \ll 1$ (рис. 5.5). Положим $\varepsilon = \delta/L$ и $\varepsilon_t = \delta_t/L$. Величины ε и ε_t обе малы; будем считать, что они одного порядка малости. Если $\partial \delta / \partial x$ и $\partial \delta_t / \partial x$ всюду малы, то и ε и ε_t малы на всей длине L .

На расстоянии L от начала пограничного слоя оценим типичные или ожидаемые величины членов в уравнениях.

Как правило, мы оцениваем величины производных по «среднему значению», которое получают из конечно-разностного соотношения в ожидаемом диапазоне изменений переменных в пограничном слое. Например, оценим величину du^*/dx^* , заметив, что при обтекании пластины однородным потоком u^* изменяется

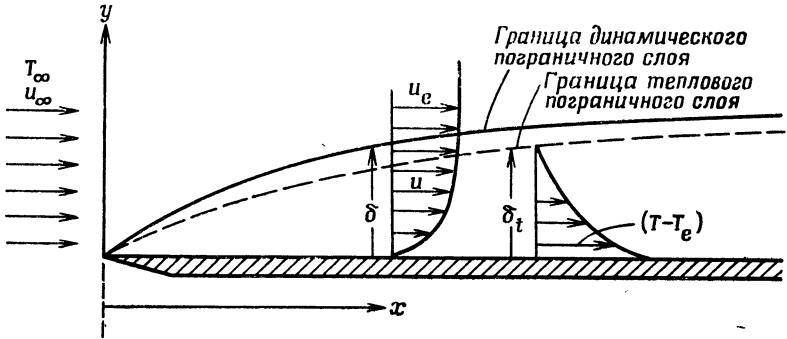


Рис. 5.5. Обозначения и система координат для пограничного слоя на плоской пластине.

от единицы до нуля при изменении x^* от нуля до единицы. Таким образом, мы говорим, что ожидаемый порядок величины du^*/dx^* равен 1. Другими словами,

$$\left| \frac{du^*}{dx^*} \right| \approx \left| \frac{0-1}{1-0} \right| = 1.$$

Множитель порядка двух не имеет значения в наших оценках, тогда как множитель порядка 10—100 важен и дает порядок величины. Следует отметить, что скорость на внешней границе может немного отличаться от u_∞ (так бывает в случае течений с градиентом давления). При этом порядок величины du^*/dx^* остается прежним. Установив, что $du^*/dx^* \approx 1$, оценим член dv^*/dy^* из уравнения неразрывности, требуя, чтобы он имел тот же порядок. Поскольку в пограничном слое y^* изменяется от 0 до ϵ , то и v^* тоже будет изменяться между 0 и ϵ . Итак, $v^* \approx \epsilon$. Если из-за какого-либо возмущающего фактора $\delta\delta/dx$ становится локально большой величиной, то в силу уравнения неразрывности v^* также может быть локально большой. Очевидно, что безразмерная тепловая величина θ изменяется от 0 до 1 в несжимаемой жидкости с постоянными свойствами.

Сейчас мы в состоянии установить порядок величин всех членов уравнений Навье—Стокса. Оценки указаны под соответствующими членами уравнений (5.100)—(5.103).

Уравнение неразрывности

$$u \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \quad (5.100)$$

Уравнение движения по оси x

$$u \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right). \quad (5.101)$$

Уравнение движения по оси y

$$u \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right). \quad (5.102)$$

Уравнение энергии

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \right) + \text{Ec} \left(u \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}_L} \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]. \quad (5.103)$$

Несколько замечаний о процедуре оценки членов. В уравнении (5.101) порядок величины градиента давления устанавливают, замечая, что на внешней границе вязкой области уравнения Навье—Стокса переходят в уравнения Эйлера (см. § 5.5). Градиент давления должен уравновешивать инерционные силы. Поэтому порядок величины градиента давления и инерционных членов должен быть одинаков. Требуем также, чтобы наибольший из вязких членов был одного порядка с инерционными членами. Для этого порядок величины Re_L должен быть $1/\varepsilon^2$, как можно видеть из уравнения (5.101).

Порядок величин всех членов уравнения (5.102) можно установить прямым путем, за исключением градиента давления. Так как градиент давления должен быть уравновешен другими членами этого уравнения, то его порядок не может быть больше порядка остальных членов уравнения (5.102). Поэтому его максимальный порядок должен быть ε .

В уравнении энергии мы до некоторой степени произвольно положим, что порядок числа Эккерта равен единице. Следует считать это значение типичным. Число Эккерта в некоторых приложениях имеет порядок больший или меньший. Порядок величины числа Пекле $\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr}$, как установлено, равен $1/\varepsilon^2$. Так как при рассмотрении уравнения предполагалось

$Re_L \approx (1/\varepsilon^2)$, то это дает $Pg \approx 1$. Это полностью соответствует нашей исходной гипотезе о том, что ε и ε_l обе малы, т. е. $\delta \approx \delta_l$. Другими словами, мы считаем, что числа Пекле и Рейнольдса имеют одинаковый порядок величины. Следует ожидать, что настоящие результаты применимы для потоков, в которых число Прандтля не сильно отличается от единицы. Точные границы такого анализа должны быть установлены сравнением с экспериментальными данными. Для последнего члена в квадратных скобках уравнения (5.103) указано три порядка: порядок 1 относится к оценке величины удвоенного произведения, возникающего при возведении в квадрат.

Выполнив перемножение, видим, что все члены уравнения движения по направлению x имеют один порядок величины, за исключением члена со второй производной (диффузия) в продольном направлении, порядок которого ε^2 . В уравнении движения по направлению y нет членов, порядок которых больше ε . В уравнении энергии несколько членов имеют порядок величины, равный единице, хотя порядок членов, связанных с работой сил давления и вязкой диссипацией, меньше. Сохраняя в уравнениях лишь члены, порядок которых равен 1, получим уравнения пограничного слоя. Ниже они записаны в размерных переменных.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.104)$$

Уравнение движения

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.105)$$

Уравнение энергии

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\beta T u}{\rho c_p} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (5.106)$$

где $\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости и $\alpha = k/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности.

Уравнение энергии можно обобщить на случай неидеального газа путем введения коэффициента объемного расширения

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho^*}{\partial T} \Big|_p.$$

Для идеального газа $\beta = 1/T$, где T — абсолютная температура. Следует подчеркнуть, что последние два члена в уравнении (5.106) сохранены на том основании, что $Es \sim 1$. Если для некоторого частного случая течения порядок величины Es стано-

вится равным ε или меньше, то этими членами следует пренебречь.

Чтобы завершить математическую формулировку задачи, надо указать начальные и граничные условия. Стационарные уравнения пограничного слоя относятся к параболическому типу, когда за маршевое направление принимают направление основного потока. Необходимо задать начальные распределения u и T . Граничные условия задают следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \\ T(x, 0) = T_w(x) \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{q(x)}{k}, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = T_e(x), \end{aligned} \quad (5.107)$$

где нижний индекс e относится к условиям на внешней границе пограничного слоя. Градиент давления в уравнениях (5.105) и (5.106) рассчитывают по известному на внешней границе течению. Если распределение $u_e(x)$ задано, то dp/dx можно рассчитать по уравнению движения для внешнего течения невязкого газа (уравнению Эйлера)

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e(x)}{dx}.$$

Не составляет труда получить уравнения пограничного слоя для течений жидкости с переменными свойствами и/или сжимаемой жидкости. Мы ограничимся рассмотрением жидкости с постоянными свойствами только из-за удобства, поскольку собираемся изложить основные принципы, которые часто можно применять для получения упрощенной системы приближенных уравнений для рассматриваемого течения. Уравнения пограничного слоя для сжимаемой жидкости с учетом переменных свойств жидкости будут представлены в п. 5.3.3.

Прежде чем завершить обсуждение вопроса оценки порядков величин для ламинарных течений, следует поднять вопрос о том, какие члены, опущенные в приближении пограничного слоя, становятся доминирующими, по мере того как отношение δ/L растет. Ответ очевиден — сначала члены порядка ε , затем члены порядка ε^2 . Заметим, что член со второй производной, которым мы пренебрегали в уравнении движения в продольном направлении, имеет порядок ε^2 , тогда как большинство членов уравнения движения в поперечном направлении имеют порядок ε . Это означает, что вклад уравнения движения в поперечном направлении ожидается более существенным, нежели учет дополнительных членов в уравнении движения в продольном направлении. Система уравнений, которая получается в результате

сохранения как членов порядка 1, так и членов порядка ε , но пренебрежения членами порядка ε^2 и выше, оказалась полезной в вычислительной гидромеханике. Такие стационарные уравнения движения жидкости, в которых пренебрегают всеми членами со второй производной в продольном направлении, известны как параболизированные уравнения Навье—Стокса в случае сверхзвуковых течений и как частично параболизированные в случае дозвуковых течений. Эти два примера относятся к категории уравнений, называемых *параболизированными уравнениями Навье—Стокса*. Они занимают промежуточное положение между уравнениями Навье—Стокса и уравнениями пограничного слоя в иерархии уравнений динамики жидкости и будут обсуждаться в гл. 8.

Теперь займемся получением приближения пограничного слоя для двумерного турбулентного течения несжимаемой жидкости с постоянными свойствами. В предположении несжимаемости жидкости ($\rho' = 0$) уравнения Рейнольдса значительно упрощаются. Обезразмерим уравнения Рейнольдса для несжимаемой жидкости во многом сходным путем, как это мы делали в случае уравнений Навье—Стокса, положив

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{\bar{u}}{u_\infty}, & v^* &= \frac{\bar{v}}{u_\infty}, & x^* &= \frac{x}{L}, & y^* &= \frac{y}{L}, & \rho^* &= \frac{\bar{\rho}}{\rho u_\infty^2}, \\ (u')^* &= \frac{u'}{u_\infty}, & (v')^* &= \frac{v'}{u_\infty}, & & & & & & \\ \theta &= \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty}, & H^* &= \frac{\bar{H} - H_\infty}{H_w - H_\infty}, & \theta' &= \frac{T'}{T_w - T_\infty}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Отнесенная к скобкам звездочка, ()^{*}, указывает на то, что все величины в скобках безразмерные, т. е. вместо $\overline{u''v''}$ будем пользоваться более удобной записью $(\overline{u''v''})^*$.

Как и ранее, предположим, что $\delta/L \ll 1$, $\delta_t/L \ll 1$ и $\varepsilon = \delta/L \approx \delta_t/L$. При установлении порядков величин рейнольдсовых напряжений и тепловых потоков мы исходим из экспериментальных наблюдений, которые свидетельствуют, что рейнольдсовы напряжения могут быть так же велики, как соответствующие величины в ламинарном потоке. Это требует, чтобы $(\overline{u''v''})^* \sim \varepsilon$. Измерения подтверждают, что $(\overline{u''^2})^*$, $(\overline{u''v''})^*$, $(\overline{v''^2})^*$ при некотором их различии в величинах и распределении имеют в пограничном слое одинаковый порядок величин. Иными словами, мы не можем сказать, что величина любого из этих членов отличается на множитель 10 или более от величины других членов. Аналогичное замечание может быть сделано в отношении уравнения энергии, что приводит к заключению о том, что

$(\overline{\theta'v'})^*$ и $(\overline{\theta'u'})^*$ имеют порядок величины ε . Тройные корреляции, как, например, $(\overline{u'u'u'})^*$, считаются малыми по сравнению с двойными и имеют порядок ε^2 [Schubauer, Tchen, 1959]. Целесообразно привести уравнение энергии в приближении пограничного слоя, записанное относительно полной энтальпии (5.89). Заменим H' по формуле

$$H' = c_p T' + u'_i \bar{u}_i + \frac{u'_i u'_i}{2}.$$

Ниже выписаны уравнения Рейнольдса, в которых под каждым членом приведена его оценка по порядку величины.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \quad (5.109)$$

Уравнение движения по оси x

$$\begin{aligned} & u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \\ & = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y^*} (\overline{u'v'})^* - \frac{\partial}{\partial x^*} (\overline{u'^2})^*. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Уравнение движения по оси y

$$\begin{aligned} & u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \\ & = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{\partial (\overline{v'u'})^*}{\partial x^*} - \frac{\partial (\overline{v'^2})^*}{\partial y^*}. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Уравнение энергии

$$\begin{aligned} & u^* \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial H^*}{\partial y^*} = \frac{T_w - T_\infty}{T_w - T_0} \left[- \frac{\partial}{\partial x^*} (\overline{u'\theta'})^* - \frac{\partial}{\partial y^*} (\overline{v'\theta'})^* \right] + \\ & + \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \right) + \text{Ec} \left[- \frac{\partial}{\partial x^*} (\overline{uu'u'})^* - \frac{\partial}{\partial x^*} (\overline{vv'u'})^* - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial y^*} (\overline{uu'v'})^* - \frac{\partial}{\partial y^*} (\overline{vv'v'})^* - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^*} (\overline{u'u'u'})^* - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^*} (\overline{v'v'u'})^* - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\overline{(u' u' v')^*} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\overline{(v' v' v')^*} \right] + \frac{E_c}{Re_L} \left[2 \frac{\partial}{\partial x^*} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(v^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \\
& + 2 \frac{\partial}{\partial y^*} \left(v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} \right)^* + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} \right)^* + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\overline{v' \frac{\partial v'}{\partial x}} \right)^* + \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\overline{u' \frac{\partial x'}{\partial x}} \right)^* + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial y}} \right)^* + 2 \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y}} \right)^* \right]. \quad (5.112)
\end{aligned}$$

Мы вновь будем считать, что Pr и Ec близки к единице. Двумерные уравнения пограничного слоя получают, сохраняя только члены первого порядка. Их можно записать в размерных переменных:

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0.$$

Уравнение движения

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{d\bar{p}}{dx} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial}{\partial y} \overline{(u' v')}. \quad (5.113)$$

Уравнение энергии

$$\begin{aligned}
\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \rho c_p \frac{\partial}{\partial y} \overline{(v' T')} - \\
&- \rho \frac{\partial}{\partial y} \overline{(\bar{u} v' u')} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right). \quad (5.114)
\end{aligned}$$

Следует заметить, что в уравнении движения по оси y остаются члены первого порядка, а именно

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \overline{(v'^2)}.$$

Они не включаются в систему уравнений пограничного слоя, так как не содержат информацию об осредненных скоростях. Изменение давления поперек пограничного слоя имеет порядок ϵ (мало по сравнению с изменением давления вдоль пограничного слоя). Погранслоное уравнение энергии легко переписать через статическую температуру, заменяя \bar{H} в уравнении (5.114) на $c_p \bar{T} + \bar{u}^2/2$. При этом мы пренебрегаем \bar{v}^2 по сравнению с \bar{u}^2 в выражении для кинетической энергии осредненного дви-

жения. Рассмотрение того, как возникает \bar{N} в (5.114), показывает, что это допустимо в приближении пограничного слоя. Исключая члены с кинетической энергией при помощи (5.113), перепишем погранслойное уравнение энергии в виде

$$\rho \bar{u} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho \bar{v} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = k \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} - \rho c_p \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'T'}) + \\ + \bar{u} \frac{d\bar{p}}{dx} + \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{v'u'} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (5.115)$$

В некоторых задачах последними двумя членами правой части (5.115) можно пренебречь. Но так поступать неправомерно в случае несжимаемой жидкости. Например, последний член в правой части дает вязкую диссипацию энергии, играющую важную роль в задачах смазки, в которых основная проблема состоит в отводе тепла, порождаемого вязкой диссипацией. Иногда можно пренебречь одним или даже обоими последними членами в правой части уравнения (5.114). Уравнения (5.114) и (5.115) легко записать в конечно-разностном виде, поэтому дальнейшее их упрощение нецелесообразно, кроме того случая, когда упомянутыми членами этих уравнений действительно можно пренебречь. Для турбулентных течений граничные условия сохраняются неизменными.

Завершая раздел, посвященный рассмотрению приближения тонкого слоя, следует заметить, что для турбулентных течений наибольший член, опущенный в уравнении движения в продольном направлении, т. е. нормальное рейнольдсово напряжение, имеет порядок больше ϵ , т. е. превосходит наибольший из опущенных членов в случае ламинарного течения. Заметим также, что только один член с рейнольдсовым напряжением и один член с рейнольдсовым тепловым потоком сохраняются в уравнениях пограничного слоя.

В любой задаче, в которой стационарные уравнения тонкого слоя используются для расчета внутренних течений, можно получить расход жидкости через канал. Это позволяет рассчитать градиент давления, тогда как в случае рассмотрения внешних течений его необходимо задавать. Об этом будет еще разговор в гл. 7.

5.3.3. Уравнения пограничного слоя для сжимаемой жидкости

Упрощение уравнений Рейнольдса при использовании приближения пограничного слоя в случае сжимаемой жидкости является более громоздкой процедурой. По этой причине ниже будут приведены лишь результаты. Подробности можно найти в цитируемых работах [Schubauer, Tchen, 1959], [van Driest, 1951]

и [Sebeci, Smith, 1974]. Как и для несжимаемой жидкости, оценка порядков величин производится на основе экспериментальных данных. Для сжимаемой жидкости должна быть оценена величина $\rho'/\bar{\rho}$.

Измерения, выполненные в газах при числах Маха около 5, показывают, что для адиабатических течений пульсации температуры происходят почти изобарически. Это означает, что $T'/\bar{T} \approx -\rho'/\bar{\rho}$. Однако имеются свидетельства того, что существуют заметные пульсации давления (порядка 8—10% среднего статического давления на стенке) при $M_e = 5$, и предполагается, что p'/\bar{p} растет с увеличением числа Маха. При отсутствии наблюдений, подтверждающих противное, оценка порядков пульсационных величин основывается обычно на допущении о том, что пульсации давления малы. Это, видимо, вполне оправданно для $M_e \leq 5$. Кроме того, были отмечены факты хорошего совпадения экспериментальных наблюдений и расчетов, основанных на этом допущении, даже при числах Маха, равных 7.5. Мы примем гипотезу об изобарическом характере пульсаций. При увеличении числа Маха в первую очередь могут расти корреляционные члены, в которые входят пульсации плотности.

Мы обнаружили, что различие между \bar{u} и \bar{u}' в приближении пограничного слоя пропадает. Это следует из того, что $\overline{\rho' u'}$ считается величиной, малой по сравнению с $\bar{\rho} \bar{u}$, и ею можно пренебречь в уравнении движения. Мы находим также, что $\bar{T} = \bar{T}'$ и $\bar{N} = \bar{N}'$, чтобы не противоречить допущениям пограничного слоя. С другой стороны, $\overline{\rho' v'}$ и $\bar{\rho} \bar{v}$ — величины одного порядка в тонком сдвиговом слое, поэтому $\bar{v} \neq \bar{v}'$. Ниже неустановившиеся уравнения пограничного слоя для сжимаемой жидкости записаны в виде, пригодном как для двумерных, так и для осесимметричных турбулентных течений. Для удобства будем опускать черту над осредненными по времени величинами и введем обозначение $\bar{v} = (\bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho' v'})/\bar{\rho}$. Эти уравнения справедливы и для ламинарных течений, если в них положить равными нулю члены с пульсациями. Системы координат показаны на рис. 5.6.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (r^m \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (r^m \rho \bar{v}) = 0. \quad (5.116)$$

Уравнение движения

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left[r^m \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u' v'} \right) \right]. \quad (5.117)$$

Уравнение энергии

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} + \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial y} \left(r^m \left\{ \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} - \rho c_p \overline{v'T'} + u \left[\left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{v'u'} \right] \right\} \right). \quad (5.118)$$

Уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T), \quad (5.119)$$

В этих уравнениях показатель степени, равный 1, соответствует осесимметричным течениям ($r^m = r$), а равный 0 — дву-

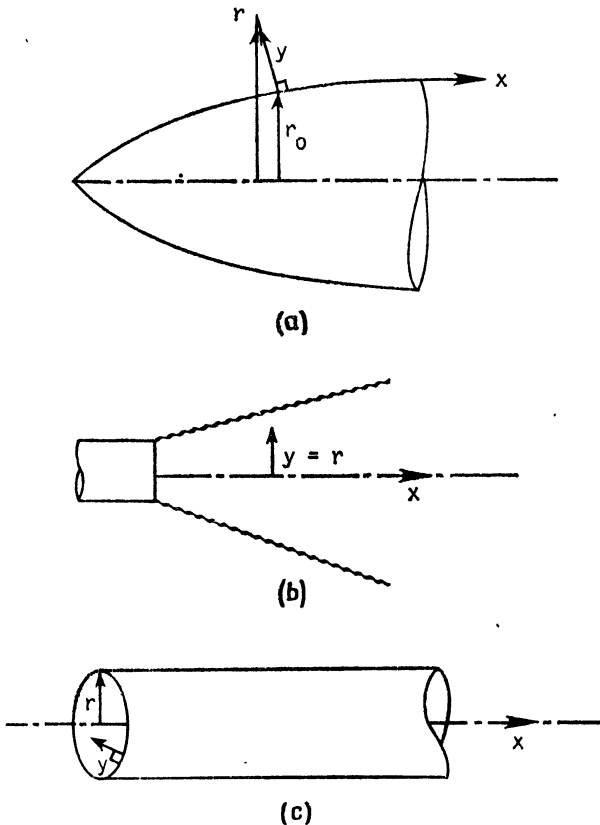


Рис. 5.6. Система координат для осесимметричных уравнений тонкого сдвигового слоя. (а) Пограничный слой при внешнем обтекании; (б) осесимметричное свободное сдвиговое течение; (с) осесимметричное течение в трубе.

мерным течениям ($r^m = 1$). Другие формы уравнения энергии будут рассмотрены ниже.

Уравнения пограничного слоя для сжимаемой жидкости выглядят немного более сложно, чем для несжимаемой. Только один член с рейнгольдсовыми напряжениями и один член с рейнгольдсовым тепловым потоком фигурируют в уравнении как для сжимаемой жидкости, так и для несжимаемой. Для ламинарных течений основное отличие заключается в изменениях свойств μ , k и ρ , когда в случае сжимаемой жидкости требуется решать уравнение энергии. Когда же свойства жидкости считаются постоянными (как это бывает для многих течений несжимаемой жидкости), уравнения движения и энергии не зависят друг от друга, поэтому во многих задачах в решении уравнения энергии просто нет необходимости.

Приближение пограничного слоя остается справедливым и для трехмерного течения, возникающего в результате поворота основного потока, если только производные скоростей в одном выделенном направлении велики. Иными словами, трехмерный пограничный слой есть поток, который остается «тонким» по отношению к одному координатному направлению. Ниже приведены нестационарные уравнения трехмерного пограничного слоя для сжимаемой жидкости в декартовых координатах. Направление y совпадает с нормалью к стенке.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (5.120)$$

Уравнение движения по оси x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u' v'} \right). \quad (5.121)$$

Уравнение движения по оси z

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} - \overline{\rho w' v'} \right). \quad (5.122)$$

Уравнение энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial H}{\partial y} + \rho w \frac{\partial H}{\partial z} = & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} - \rho c_p \overline{v' T'} \right] + \\ & + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \overline{\rho u v' u'} - \overline{\rho w v' w'}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Для трехмерного течения в приближении пограничного слоя можно выписать следующее выражение для H :

$$H = c_p T + \frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2}.$$

Трехмерные уравнения пограничного слоя использовались сначала для задач внешней аэродинамики, в которых члены с градиентами давления находились из решения уравнений невязкого течения (уравнений Эйлера). Трехмерные внутренние течения обычно рассчитываются по несколько иным уравнениям, которые будут обсуждаться в гл. 8.

При расчетах пограничного слоя на крыльях или других конфигурациях, представляющих практический интерес, обычно используются связанные с телом криволинейные координаты. Часто эти координаты неортогональные. Пример этого можно найти в книге Цебеци и др. [Cebeci et al., 1977]. Однако применение ортогональных координат более распространено (см., например, [Blottner, Ellis, 1973]). Одна из координат, x_2 , обычно направлена почти по нормали к стенке. Этого соглашения мы и будем придерживаться. Ниже выпишем уравнения трехмерного пограничного слоя в криволинейных ортогональных координатах, описанных в п. 5.1.7. Обычно x_1 есть направление основного потока, а x_3 — поперечное к нему направление. Метрические коэффициенты h_1, h_2, h_3 определены так же как в п. 5.1.7; однако h_2 в приближении пограничного слоя принимается равным единице. Кроме них мы будем использовать геодезические кривизны линий координатных поверхностей

$$K_1 = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3}, \quad K_3 = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1}. \quad (5.124)$$

В этих обозначениях уравнения турбулентного пограничного слоя сжимаемой жидкости можно записать следующим образом.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\rho h_3 u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 \rho \tilde{u}_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho h_1 u_3) = 0. \quad (5.125)$$

Уравнение движения по оси x_1

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \rho \tilde{u}_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \rho \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \rho u_1 u_3 K_1 - \rho u_3^2 K_3 = \\ = - \frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \overline{\rho u_1' u_2'} \right). \end{aligned} \quad (5.126)$$

Уравнение движения по оси x_3

$$\begin{aligned} \rho \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \rho \tilde{u}_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \rho \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \rho u_1 u_3 K_3 - \rho u_1^2 K_1 = \\ = - \frac{1}{h_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \overline{\rho u_3' u_2'} \right). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Уравнение энергии

$$\rho \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \rho \tilde{y}_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + \rho \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial H}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial H}{\partial x_2} - \rho c_p \overline{u_2' T'} + \right. \\ \left. + \mu \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) - \rho u_1 \overline{u_2' u_1'} - \rho u_3 \overline{u_2' u_3'} \right]. \quad (5.128)$$

Как всегда, для замыкания системы уравнений в нее необходимо включить уравнение состояния $\rho = \rho(p, T)$. Приведенные выше уравнения остаются справедливыми и для ламинарного течения, если пульсационные величины положить равными нулю.

§ 5.4. Введение в моделирование турбулентности**5.4.1. Некоторые общие соображения**

О насущной необходимости моделирования турбулентности уже шла речь в § 5.2. Чтобы рассчитать турбулентные течения путем решения уравнений Рейнольдса, необходимо принять гипотезу замыкания для кажущихся турбулентных напряжений и тепловых потоков. Все существующие модели турбулентности имеют недостатки. Окончательная модель турбулентности еще не создана. Некоторые авторы философски рассуждают, что уравнения Навье — Стокса — это система уравнений для описания турбулентных течений, являющаяся одновременно и точной, и общей, поэтому надеяться на то, что нам удастся получить при помощи моделирования турбулентности некую альтернативную систему с сохранением прежней точности и общности, но проще решаемую, было бы чересчур оптимистично. Если принять эту точку зрения, то наши ожидания умерятся и от поисков окончательного решения этой проблемы мы перейдем к поиску моделей, которые имеют приемлемую точность в ограниченном диапазоне условий течения.

Важно помнить, что модели турбулентности должны проверяться сравнением расчетов, выполненных на их основе, с экспериментальными данными. Следует быть особенно внимательным при интерпретации расчетов, когда модель используется вне диапазона условий, в которых она была проверена сравнением с данными эксперимента.

Цель данного раздела — введение в общепринятые методики моделирования турбулентности. При этом мы не имеем намерения дать подробные описания этих моделей, что невозможно без ознакомления с оригинальными работами, а хотим выявить рациональную сторону выбора стратегии моделирования. Простейшие модели будут описаны достаточно подробно, чтобы читатель сам был в состоянии сформулировать основную модель, пригодную для простейших тонких сдвиговых слоев.

5.4.2. Терминология моделирования

Более чем 100 лет тому назад Буссинеск [Boussinesq, 1877] выдвинул предположение, что кажущиеся турбулентные сдвиговые напряжения могли бы быть связаны со скоростью средней деформации через кажущуюся (эффективную) скалярную турбулентную (или «вихревую») вязкость. Для тензора рейнольдсовых напряжений общего вида это дает

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\mu_T \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \rho \bar{k} \right), \quad (5.129)$$

где μ_T — коэффициент турбулентной вязкости и \bar{k} — кинетическая энергия турбулентности, $\bar{k} = \overline{u'_i u'_i} / 2$. Следуя принятому в п. 5.3.2 соглашению, опускаем черту над средними по времени переменными.

По аналогии с кинетической теорией газов можно ожидать, что турбулентную вязкость можно с достаточной точностью представить в виде

$$\mu_T = \rho \nu_T l, \quad (5.130)$$

где ν_T и l — характерные масштабы скорости и длины турбулентности соответственно. Проблема состоит в том, как оценить ν_T и l .

Модели турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса могут быть разделены на две большие группы в соответствии с тем, используется или нет гипотеза Буссинеска. Модели, в которых используется гипотеза Буссинеска, будем относить к группе I и называть их *моделями турбулентной* вязкости. Большинство моделей, используемых в настоящее время в инженерных расчетах, относятся именно к этой группе. Экспериментальные наблюдения свидетельствуют, что гипотеза турбулентной вязкости пригодна для многих течений. Существуют, однако, исключения, и нет физического обоснования ее справедливости. Модели, осуществляющие замыкание уравнений Рейнольдса без гипотезы Буссинеска, будем относить к группе II. Она включает в себя модели, называемые *моделями рейнольдсовых напряжений* или *моделями с уравнениями для напряжений*.

Другой способ классификации моделей состоит в классификации согласно числу дополнительных дифференциальных уравнений в частных производных, которые необходимо решить для получения параметров модели. Это число может изменяться от 0 в случае простейших алгебраических моделей до 12 в случае наиболее сложных моделей рейнольдсовых напряжений [Donaldson, Rosenbaum, 1968]. Иногда говорят о порядке замыкания. Согласно этой терминологии, в модели замыкания первого

порядка Рейнольдсовы напряжения рассчитываются как функции только осредненных скоростей и геометрии задачи. Модель замыкания второго порядка использует решение некоторого модельного уравнения для переноса одной или более характеристик турбулентности.

К группе III будут отнесены модели, которые не основываются полностью на уравнениях Рейнольдса. Многообещающий численный метод, известный под названием *моделирование крупных вихрей*, относится к этой группе. В этом методе [Deardorff, 1970] делается попытка разрешить крупномасштабное турбулентное движение, исходя из основных принципов путем численного решения «отфильтрованной» системы уравнений, описывающих это крупномасштабное трехмерное нестационарное движение. Моделирование турбулентности используется для аппроксимации эффектов турбулентности, масштаб которых меньше размеров ячейки сетки. Такие расчеты очень перспективны, но в настоящее время их стоимость слишком велика, чтобы они могли быть инструментом инженерных расчетов.

Поскольку мы обратились к специальным моделям турбулентности, то полезно иметь в виду систему уравнений сохранения, которая должна быть дополнена уравнениями модели турбулентности. Уравнения тонкого сдвигового слоя (5.116) — (5.119) достаточно хорошо будут служить этой цели. В случае двумерных или осесимметричных уравнений тонкого сдвигового слоя задача моделирования сводится к нахождению выражений для $-\overline{\rho v' u'}$ и $\rho c_p \overline{v' T'}$. Далее опишем способы определения этих двух членов и покажем там, где это возможно, пути перехода к уравнениям более сложного вида.

5.4.3. Простые алгебраические модели

Алгебраические модели турбулентности постоянно используют гипотезу Буссинеска. Одну из наиболее успешных моделей этого типа предложил Прандтль в 1920-х гг.:

$$\mu_T = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (5.131)$$

где l — длина пути смещения, которую можно трактовать как расстояние в поперечном направлении, на котором частицы еще сохраняют свой собственный импульс (по порядку величины, равному длине среднего свободного пробега жидких частиц до столкновения или смещения). Произведение $l \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ можно интерпретировать как характерную скорость турбулентности v_T . В выражении (5.131) u — компонента скорости в направлении основного течения и y — поперечная координата.

Для трехмерных сдвиговых слоев формула Прандтля записывается обычно в виде

$$\mu_T = \rho l^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.131a)$$

В этой формуле турбулентная вязкость рассматривается как скаляр и дает качественно правильные результаты, особенно для пристенных течений. Однако имеются экспериментальные доказательства того, что во внешнем слое турбулентную вязкость следует рассматривать как тензор (т. е. величину, зависящую от направления деформации) для обеспечения лучшего согласования с результатами эксперимента. Для течений в углах или других конфигурациях, в которых нет явно выраженного поперечного направления, формула Прандтля должна быть модифицирована (см., например, [Patankar et al., 1979]).

Вычисление l в модели длины путем смещения зависит от типа рассматриваемого течения: пограничный слой, струя, след и т. п. Для пристенных течений (внутренних или внешних) хорошие результаты дает оценка согласно формуле

$$l_i = \kappa y (1 - e^{-y^+/A^+}) \quad (5.132)$$

для внутренней области, расположенной в непосредственной близости от стенки, и формуле

$$l_0 = C_1 \delta, \quad (5.133)$$

когда рассчитываемая по формуле (5.132) величина l_i впервые превосходит l_0 . Постоянная C_1 в (5.133) обычно принимается близкой к 0.089, а δ — толщина пограничного слоя.

В выражении (5.132) κ есть постоянная Кармана, обычное значение которой принимается равным 0.41, и A^* — демпфирующая константа, равная 26. Выражение в скобках есть демпфирующая функция ван Дриста [van Driest, 1956], которая используется для того, чтобы перекинуть мост между полностью развитым пограничным слоем, где $l = \kappa y$, и вязким подслоем, где $l \rightarrow 0$. Параметр y^+ определяется в виде

$$y^+ = \frac{y (|\tau_w|/\rho_w)^{1/2}}{\nu_w}.$$

Для учета влияния переменных свойств жидкости, градиентов давления, вдува, шероховатости поверхности сделаны многочисленные поправки к экспоненциальной функции. В работе [Sebeci, Smith, 1974] дано обсуждение модификаций для учета некоторых из этих эффектов. Однако, как ясно из сравнений, опубликованных в литературе материалов, для модели внутреннего слоя [см. (5.132)] не требуется модификации для точного

учета переменных свойств газов при умеренных давлениях на гладких поверхностях.

Выражение (5.132) для l_i обуславливает внутреннюю область закона стенки турбулентного течения, а выражение (5.133) для l_0 — внешнюю область «следа». На рис. 5.7 показано их

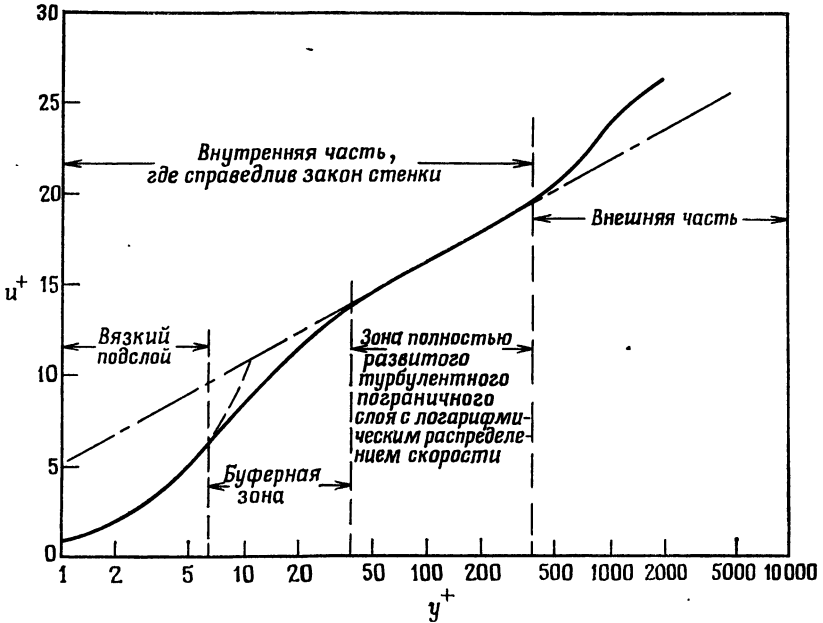


Рис. 5.7. Структура турбулентного пограничного слоя для типичного течения несжимаемой жидкости на гладкой плоской пластине. — типичный профиль скорости, $Re_\theta = 5000$; - - - $u^+ = (1/0.41) \ln y^+ + 5.15$; ···· $u^+ = y^+$.

расположение для типичного распределения скорости в турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости на гладкой непроницаемой пластине в координатах «закона стенки» (y^+ , u^+). Число Рейнольдса $Re_\theta = \rho_e u_e \theta / \mu_e$ подсчитано по толщине потери импульса, которая определяется в виде

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy.$$

Безразмерная скорость u^+ определяется как $u^+ = u / (|\tau_w| / \rho_w)^{1/2}$. Взаимное расположение внутренней и внешней областей показано на рисунке. В обычных условиях внутренняя область закона стенки включает примерно 20% толщины пограничного

слоя. Область логарифмического закона является характерной чертой пристенного турбулентного пограничного слоя, хотя закон стенки меняет свой вид в зависимости от чисел Рейнольдса и Маха.

Стоит отметить, что при малых числах Рейнольдса, подсчитанных по толщине потери импульса, т. е. при зарождении турбулентного пограничного слоя, размеры как внутренней, так и внешней областей стремятся к нулю и следует ожидать неприятностей при применении модели турбулентности, использующей выражения (5.132) и (5.133). Трудности возникают от того, что малые δ , имеющие место при зарождении турбулентного пограничного слоя, вызывают переключение на модель внешней части, прежде чем демпфирующий эффект позволит развиваться полностью турбулентной области закона стенки. Это приводит к тому, что разностные схемы, использующие эту модель, дают уменьшенные значения для касательного напряжения на стенке. Это отличие мало для течений несжимаемой жидкости и гораздо больше для сжимаемых жидкостей, причем становится все более заметным при увеличении числа Рейнольдса, так как число Маха растет из-за утолщения вязкого подслоя вследствие тепловых эффектов [Pletcher, 1976]. Естественно, на этот эффект влияет интенсивность охлаждения стенки в случае сжимаемых течений.

Можно добиться хорошего соответствия результатов расчета с экспериментальными данными при малых числах Рейнольдса путем простого запаздывания переключения с модели внутренней части слоя (5.132) на модель внешней части (5.133) до тех пор, пока $y^+ \geq 50$. Если при $y^+ = 50$ $l/\delta \leq 0.089$, то в модификации нет необходимости. Если, с другой стороны, соотношение (5.132) дает $l/\delta > 0.089$, то длина пути смешения становится постоянной во внешней части, рассчитываемой по (5.132) при $y^+ = 50$. Такая простая модификация дает линейно-логарифмический закон скорости, что согласуется с измерениями.

Для внутренней и внешней частей пограничного слоя с успехом используются и другие модели. Некоторые исследователи [Patankar, Spalding, 1970] в непосредственной близости от стенки пользуются пристенными функциями, применение которых основано на допущении о характере течения Куэтта вблизи стенки. Этот подход, вероятно, не так хорош для течений жидкости с переменными свойствами, для течений с проницаемыми стенками и другими пристенными эффектами, как подход с использованием функции ван Дриста.

Для расчета турбулентной вязкости во внешней части слоя как альтернативу расчету по соотношению (5.133) часто используют другой подход [Cebeci, Smith, 1974]. Клаузер предложил

пользоваться формулой

$$\mu_{T(\text{outer})} = \alpha \rho u_e |\delta_k^*|, \quad (5.134)$$

где α учитывает эффекты при малых числах Рейнольдса. Цебеци и Смит [Cebeci, Smith, 1974] рекомендуют пользоваться для α следующим выражением:

$$\alpha = 0.0168 \frac{1.55}{1 + \pi}, \quad (5.135)$$

где

$$\pi = 0.55 [1 - \exp(-0.243z^{1/2} - 0.298z)] \text{ и } z = \text{Re}_\theta/425 - 1.$$

Для Re_θ , большего 5000, $\alpha \approx 0.0168$. Параметр δ_k^* есть толщина вытеснения, определяемая в виде

$$\delta_k^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy. \quad (5.136)$$

Вычисление рейнольдсового теплового потока $\rho c_p \overline{v'T'}$ обычно производится при помощи алгебраических моделей в виде аналогии Рейнольдса, которая основана на подобии между переносом тепла и импульса. В применении к кажущимся турбулентным тепловым потокам она заключается в том, что постулируется гипотеза Буссинеска

$$\rho c_p \overline{v'T'} = -k_T \frac{\partial T}{\partial y}.$$

В турбулентном потоке дополнительный перенос тепла обусловлен турбулентным движением. Экспериментальные данные подтверждают, что отношение турбулентной теплопроводности к турбулентной вязкости, называемое турбулентным числом Прандтля, $\text{Pr}_T = \mu_T c_p / k_T$, является функцией с «хорошим» поведением. Большинство алгебраических моделей турбулентности хорошо работают, когда турбулентное число Прандтля полагают близкой к единице константой. Обычно считают, что $\text{Pr}_T = 0.9$. Данные эксперимента свидетельствуют, что для пристенных течений Pr_T изменяется от 0.6—0.7 во внешней части пограничного слоя до 1.5 вблизи стенки, хотя теоретических обоснований этого не имеется. Предложено несколько полуэмпирических распределений для Pr_T [Cebeci, Smith, 1974; Kays, 1972; Reynolds, 1975]. Кажущийся турбулентный тепловой поток связан с турбулентной вязкостью и параметрами осредненного течения при помощи турбулентного числа Прандтля сле-

дующим образом:

$$-\rho c_p \overline{v'T'} = \frac{c_p \mu_T}{Pr_T} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (5.132)$$

что завершает процедуру замыкания.

Для течений, отличающихся от тонких сдвиговых слоев, может возникнуть необходимость в моделировании других членов с рейнольдсовыми тепловыми потоками. Для реализации этого считают коэффициент турбулентной теплопроводности $k_T = c_p \mu_T / Pr_T$ скалярной величиной и распространяют аппроксимацию типа Буссинеска на другие компоненты градиента температуры. В качестве примера вычислим $-\rho c_p \overline{u'T'}$:

$$-\rho c_p \overline{u'T'} = \frac{c_p \mu_T}{Pr_T} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Итак, рекомендуемая основная алгебраическая модель турбулентности для пристенных пограничных слоев состоит в вычислении турбулентной вязкости по формуле Прандтля для длины пути смешения (5.131), в которой l задается выражением (5.132) для внутренней части и выражением (5.133) для внешней части слоя. Наряду с этим для внешней части слоя можно использовать формулу Клаузера (5.134). Кажущийся турбулентный тепловой поток можно оценивать по формуле (5.137), считая турбулентное число Прандтля равным 0.9. Эта простейшая математическая модель турбулентности имеет четыре эмпирические константы, которые подбираются согласно табл. 5.1.

Таблица 5.1. Эмпирические константы для алгебраических моделей турбулентности для пристенных пограничных слоев

Обозначение	Описание
κ	Константа Кармана для внутренней части слоя ≈ 0.41
A^+	Константа ван Дриста для демпфирующей функции ≈ 26 , но часто модифицируется для учета более сложных эффектов
C_1 или α	Константа для внешней части слоя $C_1 \approx 0.089$, $\alpha \approx 0.0168$, но обычно включает $f(Re_\theta)$ в α
Pr_T	Турбулентное число Прандтля, обычно $Pr_T \approx 0.9$

Алгебраические модели хорошо зарекомендовали себя для сравнительно простых течений вязкой жидкости, но требуют модификации для расчета течений более сложного вида. Следует сказать, что сжимаемость жидкости не относится к этим ослож-

няющим факторам. Структура турбулентности остается в основных своих чертах неизменной вплоть до чисел Маха по меньшей мере 5. Естественно, изменения плотности и других свойств должны быть учтены в уравнениях сохранения, используемых совместно с моделью турбулентности. В табл. 5.2 перечислены некоторые особенности течений, требующие модификации описанной выше простейшей алгебраической модели. Указаны также ссылки на библиографические источники, в которых эти модификации обсуждаются.

Таблица 5.2. Эффекты, требующие модификации или добавлений к простейшим алгебраическим моделям турбулентности

Эффект	Библиографические источники
Малые числа Рейнольдса	[Cebeci, Smith, 1974; Pletcher, 1976; Bushnell et al., 1975; Herring, Mellor, 1968; Bushnell et al. 1976; McDonald, 1970]
Шероховатость	[Cebeci, Smith, 1974; Bushnell et al., 1976; McDonald, Fish, 1973; Healzer et al., 1974; Adams, Hodge, 1977]
Проницаемость стенки	[Cebeci, Smith, 1974; Bushnell et al., 1976; Pletcher, 1974; Baker, Launder, 1974; Kays, Moffat, 1975]
Большие градиенты давления	[Cebeci, Smith, 1974; Bushnell et al., 1976; Adams, Hodge, 1977; Pletcher, 1974; Baker, Launder, 1974; Kays, Moffat, 1975; Jones, Launder, 1972; Kreskovsky et al., 1974; Horstman, 1977]
Сливающиеся сдвиговые слои	[Bradshaw et al., 1973; Stephenson, 1976; Emery, Gessner, 1976; Cebeci, Chang, 1978; Malik, Pletcher, 1978]

Это обсуждение алгебраических моделей для пристенных течений ни в коей мере не является исчерпывающим. За истекшие годы было предложено множество слегка отличающихся друг от друга алгебраических моделей. Было выполнено сравнение одиннадцати алгебраических моделей для турбулентных течений в трубах с теплообменом [McEligot et al., 1970]. Оказалось, что ни одна из них не дает лучших результатов, нежели описанная выше модель длины пути смешения с демпфирующей функцией ван Дриста.

Чуть меньше информации имеется об алгебраических моделях турбулентности для свободных сдвиговых течений. Эта категория течений более трудна для моделирования, нежели пристенные пограничные слои, особенно если общность модели служит мерилем ее достоинств. Некоторое обсуждение простых моделей для круглых струй можно найти в работах [Madni, Pletcher, 1975b, 1977a]. На начальном участке круглой струи может использоваться формула Прандтля длины пути смешения

(5.131), где l выражается в виде

$$l = 0.0762\delta_m \quad (5.138)$$

(δ_m — ширина зоны смешения). Эта модель уже не работает, когда сдвиговые слои сливаются, и в этой точке необходим переход к модели формы струи [Hwang, Fletcher, 1978]:

$$v_T = \gamma F y_{1/2} (u_{\max} - u_{\min}) \quad (5.139)$$

или [Madni, Fletcher, 1975b]:

$$v_T = \frac{2F}{a} \int_y^\infty |u_e - u| y dy, \quad (5.140)$$

которая обеспечивает хорошее соответствие с измерениями для круглых соосных струй. Выражение (5.139) есть модификация модели, предложенной Прандтлем для струй [Prandtl, 1926]. В выражениях (5.139), (5.140) a есть радиус отверстия, γ — функция перемежаемости:

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq y/y_{1/2} \leq 0.8, \\ (0.5)^z, & \text{если } y/y_{1/2} > 0.8, \end{cases} \quad (5.141)$$

где $z = (y/y_{1/2} - 0.8)^{2.5}$, а F — функции отношения R скорости потока к скорости истечения из отверстия, задаваемая выражением $F = 0.015(1 + 2.13R^2)$. Координата y измеряется от оси струи, и $y_{1/2}$ — расстояние от оси струи до точки, в которой скорость убывает до значения, равного средней величине от скорости на оси струи и скорости внешнего течения.

Поводом для обращения к более сложным моделям турбулентности является то, что алгебраические модели дают оценку турбулентной вязкости только в терминах *локальных* параметров течения, однако у нас есть ощущение, что модель турбулентности должна иметь механизм, посредством которого осуществлялось бы влияние на структуру турбулентности (вязкость) со стороны потока, расположенного выше по течению. Кроме того, при специальных расширениях и поправках простейших моделей часто требуется учесть специфические эффекты, поэтому приходится менять константы моделей турбулентности для того, чтобы последние были пригодны для описания разных классов течений.

Кроме того, при работе с простыми моделями требуется вводить специальные дополнения и поправки, чтобы учесть специфические эффекты, а также следует модифицировать константы для различных классов сдвиговых течений. Для многих исследователей это было побуждающим мотивом для разработки

модели, которая обладала бы достаточной общностью и не требовала бы изменения констант для описания разных классов течений.

Если мы примем общую форму выражения турбулентной вязкости $\mu_T = \rho v_T l$, то для придания большей общности моделям турбулентной вязкости представляется логичным считать v_T и, возможно, l более сложными (и, следовательно, более общими) функциями течения, что позволяет учитывать предысторию течения (т. е. влияние набегающего потока). Это соображение служит побудительной причиной для разработки более сложных моделей турбулентности.

5.4.4. Модели с одним обыкновенным дифференциальным уравнением

Модель с одним обыкновенным дифференциальным уравнением будет определена как модель, в которой один из параметров модели (v_T , l или сама μ_T) в направлении основного потока определяется из решения *обыкновенного* дифференциального уравнения. Уравнение обычно получают, полагая, что этот параметр зависит только от одной координаты. В эту группу попадают модели, являющиеся дальнейшим развитием моделей длины пути смешения или релаксационных моделей. В модели с одним уравнением решается дополнительное дифференциальное уравнение в частных производных для параметра модели. Основные черты нескольких моделей с одним обыкновенным дифференциальным уравнением приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3. Некоторые из моделей с одним обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)

Модель	Уравнение переноса, используемое как основа для одного ОДУ	Параметр модели, определяемый из решения одного ОДУ	Библиографические ссылки
5A	Кинетическая энергия турбулентности	l_∞	[McDonald, Camerata, 1968; Kreskovsky et al., 1974; McDonald, Kreskovsky, 1974]
5B	То же	l_∞	[Chan, 1972]
5C	»	l_∞	[Adam, Hodge, 1977]
5D	Эмпирическое ОДУ для $\mu_{T \text{ outer}}$	$\mu_{T \text{ outer}}$	[Shang, Hankey, 1975]
5E	То же	$\mu_{T \text{ outer}}$	[Reyhner, 1968]
5F	Эмпирическое ОДУ для l_∞	l_∞	[Malik, Pletcher, 1978; Pletcher, 1978]

Первые три модели из табл. 5.3 отличаются друг от друга в деталях, хотя все три используют интегральную форму уравнения переноса кинетической энергии турбулентности для учета влияния предыстории потока на турбулентную вязкость. Модели такого типа были разработаны для расчета перехода, влияния эффектов шероховатости, проницаемости стенок, градиентов давления и качественного учета реламинаризации. Сообщается, что эти модели тестировались в основном на задачах внешнего обтекания, а не на задачах течения в каналах.

Хотя модели 5D, 5E и 5F, по-видимому, являются чисто эмпирическими релаксационными моделями или моделями с запаздыванием, было показано [Birch, 1976], что модели этого типа на самом деле эквивалентны одномерным вариантам уравнений в частных производных для переноса рассматриваемых величин, за исключением того, что эти уравнения переноса нельзя получить из уравнений Навье — Стокса. Это не слишком большой недостаток, поскольку их все равно нельзя решать без упрощений эмпирического характера и моделирования членов. В конце концов независимо от своей природы эти уравнения принимают вид, в котором имеются члены, описывающие генерацию, диссипацию, диффузию и конвекцию рассматриваемых величин.

Модель 5F для пристенных пограничных слоев использует выражение (5.132) для длины пути смешения во внутренней части. Во внешней части длина пути смешения принимается равной

$$l_0 = 0.12L, \quad (5.142)$$

где L определяется из решения обыкновенного дифференциального уравнения. Для сдвиговых слоев постоянной толщины за L принимается толщина δ сдвигового слоя. При изменении δ в направлении потока L будет отставать от δ , причем характер этого отставания будет определяться временем релаксации крупных вихрей, которое считается равным δ/\bar{u}_τ , где \bar{u}_τ — характерная турбулентная скорость. Если далее принять, что скорость жидкости во внешней части сдвигового слоя равна u_e , то расстояние в направлении течения, которое поток проходит за время релаксации, есть $L^* = C_2 u_e \delta / \bar{u}_\tau$. Тогда уравнение для изменения L может быть записано в предположении, что L релаксирует к δ по закону

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\delta - L}{L^*}. \quad (5.143)$$

Эта модель была распространена на свободные сдвиговые течения [Minaie, G\^l\^e\^t\^c\^h\^e\^r, 1982], при этом δ интерпретируется как расстояние между точкой максимума сдвигового напряжения и

внешней границей течения, а u_e заменяется на продольную скорость, осредненную по сдвиговому слою. Оптимальная оценка \bar{u}_τ , по-видимому, не найдена. Выражение $\bar{u}_\tau = (L/\delta) (|\tau_w|/\rho_w)^{1/2}$ с успехом применяется для течений вдоль твердых поверхностей, тогда как $\bar{u}_\tau = (\tau_{\max}/\rho_w)^{1/2}$ оказалось вполне удовлетворительным для свободных сдвиговых течений. Можно было бы предположить, что последнее выражение будет приемлемым и для пристенных пограничных слоев. В окончательном виде обыкновенное дифференциальное уравнение для переноса L в случае пристенных пограничных слоев [Pletcher, 1978] и смешивающихся сдвиговых слоев в кольцевых каналах [Malik, Pletcher, 1978] можно записать в виде

$$u_e \frac{dL}{dx} = 1.25 \left| \frac{\tau_w}{\rho_w} \right|^{1/2} \left[\frac{L}{\delta} - \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (5.144)$$

5.4.5. Модели с одним уравнением

Очевидный недостаток алгебраических моделей турбулентной вязкости, в которых ν_T в выражении для $\mu_T = \rho \nu_T l$ обычно оценивается по формуле $\nu_T = l |\partial u / \partial y|$, заключается в том, что $\mu_T = k_T = 0$ всюду, где $|\partial u / \partial y| = 0$. Это означает, что μ_T и k_T будут нулями на центральной линии трубы, в областях перемешивания пристенной струи с основным потоком и при течении между двумя плоскими стенками, когда одна стенка горячая, а другая холодная, при истечении через круглое отверстие. Измерения да и здравый смысл говорят, что μ_T и k_T не равны нулю в условиях, когда $\partial u / \partial y = 0$. Модели длины пути смешения можно подкорректировать, чтобы преодолеть и это их слабое место, но этот их принципиальный недостаток побуждает к поискам других выражений для μ_T и k_T . В пользу алгебраических моделей следует сказать, что этот их недостаток не всегда является решающим, так как рейнольдсовы напряжения и тепловые потоки часто бывают малыми, когда $\partial u / \partial y = 0$. В работе [Malik, Pletcher, 1981] приведены примеры, иллюстрирующие это явление.

В 40-х годах Прандтль и А. Н. Колмогоров предположили, что в формуле $\mu_T = \rho \nu_T l$ скорость ν_T пропорциональна корню квадратному из кинетической энергии турбулентности $\bar{k} = 1/2 \overline{u'_i u'_i}$. Таким образом, турбулентную вязкость можно оценивать как

$$\mu_T = C_k \rho l (\bar{k})^{1/2} \quad (5.145)$$

и μ_T уже не обращается в нуль, когда $\partial u / \partial y = 0$. Кинетическая энергия \bar{k} — величина, доступная измерениям, и ее легко интерпретировать с физической точки зрения. Встает вопрос, как считать \bar{k} .

Уравнение для \bar{k} можно получить (задача 5.18) из уравнений Навье—Стокса. Для двумерного течения несжимаемой жидкости в приближении тонкого слоя его можно записать в виде

$$\rho \frac{D\bar{k}}{Dt} = \mu \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{v'k'}) + \overline{v'p'} - \overline{\rho v'u'} \frac{\partial u}{\partial y} - \mu \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (5.146)$$

которое в свою очередь обычно моделируется уравнением

$$\rho \frac{D\bar{k}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right] + \mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{C_D \rho (\bar{k})^{3/2}}{l}. \quad (5.147)$$

В этом уравнении члены имеют следующий физический смысл: член слева — приращение \bar{k} в жидком объеме, первый член справа — скорость диффузии для \bar{k} , второй член — скорость генерации для \bar{k} , третий член — скорость диссипации для \bar{k} . Это модельное уравнение решается совместно с системой уравнений в частных производных, описывающих рассматриваемое течение жидкости. Заметим, что параметр l необходимо задавать алгебраической формулой. В уравнении (5.147) Pr_k — число Прандтля для кинетической энергии турбулентности (≈ 1.0), а $C_D \approx 0.164$, если l считать обычной длиной пути смешения.

Приведенное выше модельное уравнение справедливо только для полностью развитых турбулентных течений, т. е. вдали от демпфирующего влияния стенки. Для типичных пристенных течений это означает, что y^+ должно быть больше 30. Для задания внутренних граничных условий для \bar{k} часто используют пристенные функции [Launder, Spalding, 1974]. Другой способ задания внутренних граничных условий для \bar{k} основан на известном экспериментальном наблюдении, что вблизи стенки конвекция и диффузия \bar{k} обычно малы. Поэтому генерация и диссипация \bar{k} уравновешивают друг друга и можно показать (задача 5.19), что модель для кинетической энергии турбулентности сведется при этих условиях к модели длины пути смешения (5.131). В области, где диффузией и конвекцией можно пренебречь, в качестве внутреннего граничного условия для \bar{k} можно использовать (задача 5.22)

$$\bar{k}(x, y_c) = \frac{\tau(y_c)}{\rho C_D^{2/3}}, \quad (5.148)$$

где y_c — координата точки внутри области, где, как ожидается, справедливо логарифмическое распределение скорости. Если же $y < y_c$, то можно использовать алгебраическую модель типа

модели Прандтля [(5.131) и (5.132)]. В работе [Lauder, Spalding, 1972] можно найти дальнейшие подробности применения моделей из одного уравнения для течений несжимаемой жидкости.

Не так давно модель турбулентности с одним уравнением была распространена на случай течения сжимаемой жидкости [Rubesin, 1976], и полученные к настоящему времени результаты выглядят обнадеживающе. Представляется очевидным, что для течений, где есть взаимодействие с ударной волной, которое заметно влияет на уровень турбулентности в потоке, расчеты по модели Губезина с одним уравнением являются определенным улучшением по сравнению с расчетами по алгебраическим моделям. В целом, однако, качество большинства моделей с одним уравнением (как для несжимаемой жидкости, так и для сжимаемой) оставляет желать лучшего даже в тех немногочисленных случаях, когда применение этих моделей дает лучшие результаты по сравнению с расчетами по алгебраическим моделям. На самом деле некоторые течения могут быть рассчитаны с большей точностью по моделям с одним обыкновенным дифференциальным уравнением, нежели по модели с одним уравнением типа Прандтля — Колмогорова, которая просто дает изменение скорости турбулентности в выражении для турбулентной вязкости. Причина этого может лежать в том, что для большинства течений улучшение в задании величины характерной длины l дает больший эффект, чем изменение скорости турбулентности u_T . Многие из моделей с одним обыкновенным дифференциальным уравнением, перечисленные в табл. 5.3, дают большую точность масштаба длины.

Были предложены и другие модели с одним уравнением, отличающиеся от уравнений, основанных на подходе Прандтля — Колмогорова. Наиболее известна из них модель Брэдшоу [Bradshaw et al., 1967]. В модели Брэдшоу используется уравнение для кинетической энергии турбулентности, но моделируется она иным способом. Также иначе записано и уравнение движения, в котором турбулентные сдвиговые напряжения предполагаются пропорциональными \bar{k} . Подробности модели здесь обсуждаться не будут, однако интересной чертой модели Брэдшоу является то, что как следствие формы моделирования членов турбулентного переноса тип системы становится гиперболическим и она может быть решена методом, аналогичным методу характеристик. Модель Брэдшоу с успехом применяется для расчета пристенных пограничных слоев, но при всем этом результаты немалого лучше результатов расчета по алгебраическим моделям или моделям с одним обыкновенным дифференциальным уравнением.

5.4.6. Модели с одним уравнением и одним обыкновенным дифференциальным уравнением и модели с двумя уравнениями

При переходе от моделей длины пути смещения к моделям с одним уравнением принципиальный шаг вперед состоял в том, что последние допускают изменение параметра, описываемое уравнением модели. В моделях с одним уравнением характерная длина по-прежнему задается алгебраическим выражением и зависит только от *локальных* параметров течения. Однако исследователи турбулентности интуитивно чувствовали, что масштаб длины в турбулентных моделях также должен зависеть и от предыстории течения, а не только от локальных условий. Очевидный способ учесть более сложную зависимость l от картины течения заключается в том, чтобы записать уравнение переноса для изменения l . Если в систему добавляется обыкновенное дифференциальное уравнение, как, например, (5.144) для модели 5F, то результирующую модель можно было бы назвать *моделью с одним уравнением и одним обыкновенным дифференциальным уравнением*. Такая модель использовалась для расчета отрывных турбулентных пограничных слоев в задачах внешнего обтекания [Pletcher, 1978], для течений в круглых каналах с теплопередачей [Malik, Pletcher, 1981], для плоских и круглых струй [Minaie, Pletcher, 1982].

Когда для масштаба длины получают уравнение в частных производных, то такую модель часто называют *моделью турбулентности с двумя уравнениями*.

Хотя можно получить уравнение в частных производных для масштаба длины, члены его не так просто моделировать; в некоторых работах добились большего, решая уравнение переноса для параметра, связанного с масштабом длины, а не для самого масштаба длины. Этот подход обсуждается Лаундером и Сполдингом [Launder, Spalding, 1974].

Одной из наиболее употребительных моделей с двумя уравнениями является $(\bar{k} - \varepsilon)$ -модель, впервые предложенная Хэрлоу и Накаямой [Harlow, Nakayama, 1968]. В своем описании этой модели следуем работам [Jones, Launder, 1972] и [Launder, Spalding, 1974]. Параметр ε есть скорость диссипации турбулентности; предполагается, что он связан с другими модельными параметрами формулой $\varepsilon = C(\bar{k})^{3/2}/l_\varepsilon$, где l_ε — масштаб диссипации и C — постоянная. Тогда турбулентная вязкость выражается через ε следующим образом:

$$\mu_T = \frac{C_\mu \rho (\bar{k})^2}{\varepsilon} = c' \rho (\bar{k})^{1/2} l_\varepsilon. \quad (5.149)$$

Накоплен большой опыт работы с этой моделью, в основном для течений, в которых свойства жидкости изменялись мало.

Те, кто собирается пользоваться этой моделью, должны прежде всего тщательно изучить литературу по этому вопросу. В нашем же описании модели с двумя уравнениями речь пойдет об основных идеях, лежащих в ее основе, что необходимо для работы с ней. Турбулентная вязкость рассчитывается по формуле (5.149). Для кинетической энергии турбулентности используется уравнение в форме (5.147), в котором последний член интерпретируется как плотность, умноженная на скорость диссипации $\rho \epsilon$. Чтобы замкнуть систему, добавляется параболическое уравнение переноса для ϵ (здесь оно записано для несжимаемой жидкости):

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_T}{Pr_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + \frac{C_2 \mu_T \epsilon}{\bar{k}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{C_3 \rho \epsilon^2}{\bar{k}}. \quad (5.150)$$

Члены в правой части уравнения (5.150) (слева направо) можно интерпретировать как диффузию, скорость генерации и диссипации ϵ . Типичные значения констант модели приведены в табл. 5.4.

Таблица 5.4. Константы для $(\bar{k} - \epsilon)$ -модели

C_μ	C_2	C_3	$Pr_{\bar{k}}$	Pr_ϵ	Pr_T
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	0.9

Было предложено много других моделей с двумя уравнениями, из них часто используются модели Нга — Сполдинга [Ng, Spalding, 1972] и Уилкокса — Трейси [Wilcox, Traci, 1976], причем последняя является модификацией более ранней модели Сэффмена — Уилкокса [Saffman, Wilcox, 1974]. Рубезин [Rubesin, 1977] составил сводку основных различий между моделями, а Чэмберз и Уилкоккс [Chambers, Wilcox, 1976] провели более подробное сравнение моделей. Всюду в них используется модельная форма уравнения для кинетической энергии турбулентности, но представление в них диффузионного члена различно. Но самое удивительное различие состоит в выборе зависимой переменной для второго модельного уравнения переноса, согласно которому определяется масштаб длины.

Рубезин [Rubesin, 1977] сравнил несколько моделей для несжимаемой жидкости, и все они работают достаточно хорошо; трудно даже выделить лучшую из них.

Приведенное выше уравнение переноса для ε непригодно вблизи стенки, т. е. внутри вязкого подслоя. Ситуация обстоит точно так же, как и в случае уравнения для кинетической энергии турбулентности (5.147). Граничное условие для ε на внутренней границе может быть поставлено в той же самой точке y_c , что и для \bar{k} (см. (5.148)). Считают, что в этой точке справедлива гипотеза длины пути смещения Прандтля и

$$\varepsilon = \frac{C_D \bar{k}^{3/2}}{l} = \frac{C_D [\bar{k}(y_c)]^{3/2}}{\kappa y}.$$

Величина $\bar{k}(y_c)$ может быть найдена из выражения (5.148). В большинстве практических приложений ($\bar{k} - \varepsilon$)-модели для изучения пристенной области используются функции стенки (см. [Launder, Spalding, 1974]). В качестве альтернативы в уравнения ($\bar{k} - \varepsilon$)-модели вводятся дополнительные члены, чтобы распространить область применимости модели на вязкий подслой [Jones, Launder, 1972; Wolfstein, 1969] и др. В связи с этим вязкий подслой часто называют областью малых турбулентных чисел Рейнольдса $[(\bar{k})^{1/2} l_\varepsilon / \nu]$. Такой способ моделирования является решающим для сложных турбулентных течений, как, например, для течений с зонами отрыва или сильными изменениями свойств жидкости. Недостаточная точность расчетов в случае сложных турбулентных течений во внутренней части слоя, по-видимому, ограничивает в настоящее время применимость ($\bar{k} - \varepsilon$)-модели (и почти всех других моделей).

Были предложены модификации ($\bar{k} - \varepsilon$)-модели для учета эффектов плавучести и кривизны линий тока в турбулентном течении. Общепринятый способ замыкания для членов с рейнольдсовыми тепловыми потоками при помощи ($\bar{k} - \varepsilon$)-модели использует ту же самую формулировку турбулентного числа Прандтля, которая применялась в алгебраических моделях (5.137).

Несмотря на энтузиазм, который возникал время от времени в отношении моделей с двумя уравнениями, стоит, наверное, еще раз упомянуть два основных недостатка этого типа моделей. Первый заключается в том, что обсужденные здесь модели с двумя уравнениями являются моделями турбулентной вязкости, основанными на гипотезе Буссинеска (5.129). Только в них μ_t есть функция более сложного вида, тогда как в алгебраической модели μ_t — локальная функция. Если гипотеза Буссинеска оказывается несправедливой, то даже применение моделей с двумя уравнениями обречено на неудачу. Несомненно, однако, что для инженерных расчетов многих течений гипотеза Буссинеска соответствует реальности с достаточной точностью.

Второй недостаток заключается в необходимости моделирования разных членов модельных уравнений переноса, особенно членов с тройными корреляциями. Впрочем, этот недостаток присущ всем моделям замыкания более высокого порядка. Эти модели не обладают никакими чудесными свойствами, они только являются отражением большого проникновения в суть дела и интуиции специалистов, их предложивших. Будем, однако, оптимистами: эти модели могут быть усовершенствованы за счет более изощренного моделирования входящих в уравнения членов.

5.4.7. Модели рейнольдсовых напряжений

Модели рейнольдсовых напряжений мы относим к группе моделей II (иногда их называют *моделями с уравнением для напряжений*), в которых не предполагают, что турбулентные напряжения пропорциональны средней скорости деформации. Например, в случае несжимаемой жидкости это означает, что

$$-\overline{\rho u'v'} \neq \mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

В настоящее время эти модели широко используются скорее как инструмент или предмет в исследованиях турбулентности, нежели как средство решения инженерных задач. Для рейнольдсовых напряжений могут быть получены точные уравнения (задача 5.17). Естественно, в этих уравнениях имеются члены, которые необходимо моделировать; причем следует помнить, что для турбулентных течений можно вывести уравнение для любой величины, но ни одно из них нельзя решить точно. Такое моделирование, начало которому положили пионерские работы Ротты [Rotta, 1951], требует по меньшей мере трех уравнений, а для течений, в которых нормальные напряжения велики, даже пяти. В одной из последних моделей рейнольдсовых напряжений [Daly, Harlow, 1970] вводится скорость диссипации ϵ и решаются пять уравнений:

$$1. \rho \frac{D\overline{u'^2}}{Dt} = \dots,$$

$$2. \rho \frac{D\overline{u'^2}}{Dt} = \dots,$$

$$3. \rho \frac{D\overline{v'^2}}{Dt} = \dots$$

$$4. \rho \frac{D\overline{w'^2}}{Dt} = \dots,$$

$$5. \rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \dots$$

помимо решения обычных уравнений сохранения массы, импульса и энергии. Моделирование членов в правых частях приведенных уравнений требует многочисленных предположений.

Упомянем некоторые модели рейнольдсовых напряжений [Hanjalić, Launder, 1972; Daly, Harlow, 1970; Donaldson, 1972], получившие наибольшее распространение к настоящему времени. В работе Лаундера [Launder, 1979] описано состояние дел и перспективы проблемы замыкания для моделей рейнольдсовых напряжений.

В моделях рейнольдсовых напряжений отсутствует ограничение, накладываемое принятием гипотезы Буссинеска о связи турбулентных напряжений со средней скоростью деформации, зато они содержат наибольшее количество уравнений и констант. Поэтому, по-видимому, эти модели имеют больше шансов стать «окончательными» моделями турбулентности, если будет достигнут успех в решении осредненных по времени уравнений Навье—Стокса. Тем не менее в этих моделях все еще необходимо делать допущения при моделировании входящих в состав уравнений членов, которые в настоящее время никак нельзя измерить. Модели рейнольдсовых напряжений находятся еще в стадии разработки, и пройдет еще некоторое время прежде, чем они будут усовершенствованы и проверены настолько, что станут употребляться в инженерных расчетах. Поскольку более простые модели адекватны в отношении многих типов течений, то модели рейнольдсовых напряжений можно применять в инженерных расчетах в тех случаях, когда сложность задачи этого требует. До сих пор модели рейнольдсовых напряжений не проверены экспериментально для многих типов сложных течений.

§ 5.5. Уравнения Эйлера

В 1904 г. Прандтль обнаружил (см. п. 5.3.1), что при достаточно больших числах Рейнольдса влияние вязкости проявляется только в тонком пограничном слое вблизи твердой поверхности. Как следствие этого расчет в невязкой (и нетеплопроводной) области поля течения можно производить независимо от пограничного слоя. Конечно, так поступать правомерно, только если пограничный слой является тонким по сравнению с характерным размером поля течения, так что можно пренебречь взаимодействием между пограничным слоем и невязкой областью. Для течений, когда этого делать нельзя, все же можно раздельно решать системы уравнений в двух этих областях поля течения, но осуществлять это следует путем итераций. Итерационная процедура может оказаться неэффективной с точки зрения вычислений, поэтому следует иногда использовать единую

систему уравнений, справедливую во всем поле течения. Уравнения такого типа будут рассмотрены в гл. 8.

В настоящем параграфе мы обсудим систему уравнений, справедливую только в невязкой части поля течения. Эти уравнения получаются, когда в полных уравнениях Навье — Стокса опускают члены с вязкостью и теплопроводностью. Получающиеся в результате этого уравнения могут быть решены численно (см. гл. 6) с гораздо меньшими затратами машинного времени, чем в случае решения полных уравнений Навье — Стокса. Мы будем называть такие упрощенные уравнения *уравнениями Эйлера*, хотя, строго говоря, имя Эйлера следовало бы упоминать только в связи с уравнением импульса для течения невязкого газа. В дополнение к допущению о невязком характере течения будем также предполагать, что подвод тепла извне отсутствует, поэтому член $\partial Q/\partial t$ в уравнении энергии можно опустить.

5.5.1. Уравнение неразрывности

В уравнении неразрывности отсутствуют члены, связанные с вязкостью или теплопередачей, поэтому приведенные в п. 5.1.1 различные формы этого уравнения нельзя упростить для течения невязкой жидкости. Однако если стационарная форма уравнения неразрывности содержит только два члена в выбранной системе координат, то можно вообще не рассматривать уравнение неразрывности, а ввести в рассмотрение так называемую *функцию тока* ψ . Так можно поступать независимо от того, рассматриваем ли мы течение вязкой жидкости или невязкой. Например, двумерное стационарное уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости, записанное в декартовой системе координат, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0. \quad (5.151)$$

Если функцию тока определить как

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.152)$$

то она будет удовлетворять уравнению неразрывности (5.151) и нет необходимости решать уравнение неразрывности, а число независимых переменных уменьшается до одной. Правда, при такой замене порядок остальных уравнений переменных повышается на единицу. Физический смысл функции тока становится

очевидным, если учесть

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = -\rho v dx + \rho u dy = \\ &= \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = d\dot{m}. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Видно, что линии постоянства ψ ($d\psi = 0$) суть линии, расход через которые равен нулю: $d\dot{m} = 0$. *Линию тока* мы определяем как линию, касательная к которой в любой точке совпадает с направлением вектора скорости в этой точке. Поэтому в нашем случае линии постоянства ψ являются линиями тока и разница значений ψ на двух любых линиях тока дает массовый расход через кривую, соединяющую две точки на этих линиях тока (отнесенный к расстоянию между ними).

Для двумерного течения несжимаемой жидкости уравнение неразрывности в декартовых координатах записывается как

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.154)$$

и функция тока определяется следующим образом:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (5.155)$$

Для стационарного осесимметричного течения несжимаемой жидкости уравнение неразрывности в цилиндрических координатах (см. п. 5.1.7) выглядит так:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) = 0 \quad (5.156)$$

и функция тока определяется соотношениями

$$\rho u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \rho u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (5.157)$$

Для трехмерных течений вместо уравнения неразрывности можно ввести две функции тока. Однако сложность такого подхода делает его менее привлекательным по сравнению с подходом, где уравнение неразрывности записано в исходной форме.

5.5.2. Уравнения количества движения для невязкой жидкости

Когда в уравнениях Навье—Стокса (5.18) опускают члены с вязкостью, то получается уравнение

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p. \quad (5.158)$$

Впервые его вывел Эйлер в 1755 г., поэтому оно названо его именем. Если пренебречь массовыми силами и течение считать

стационарным, то уравнение Эйлера сведется к уравнению

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (5.159)$$

Его интегрирование вдоль некоторой линии в поле течения дает

$$\int (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{r} = - \int \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{r}, \quad (5.160)$$

где $d\mathbf{r}$ — дифференциал длины пути вдоль этой линии. В декартовых координатах

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}. \quad (5.161)$$

Пусть эта линия является линией тока. Тогда \mathbf{V} имеет то же направление, что и $d\mathbf{r}$, и мы можем упростить подинтегральное выражение в левой части (5.160):

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{r} = V \frac{\partial V}{\partial r} \cdot d\mathbf{r} = V \frac{\partial V}{\partial r} dr = V dV = d\left(\frac{V^2}{2}\right).$$

Аналогичным образом упрощается подинтегральное выражение в правой части:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{r} = \frac{dp}{\rho},$$

и уравнение (5.160) сводится к уравнению

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}. \quad (5.162)$$

Интеграл в этом выражении можно рассчитать, если течение *баротропное*. Жидкость является *баротропной*, если ρ — функция только от p (или константа), т. е. $\rho = \rho(p)$. Назовем примеры баротропных течений:

1. Стационарное течение несжимаемой жидкости

$$\rho = \text{const}. \quad (5.163)$$

2. Изэнтропическое (с постоянной энтропией) течение (см. п. 5.5.4)

$$\rho = (\text{const}) p^{1/\gamma}. \quad (5.164)$$

Таким образом, для несжимаемой жидкости интегрирование уравнения Эйлера (5.162) вдоль линии тока дает

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{const}. \quad (5.165)$$

Это соотношение называется *уравнением Бернулли*. Для изэнтропического течения сжимаемой жидкости уравнение (5.162)

сведется к уравнению

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (5.166)$$

которое называют *уравнением Бернулли для сжимаемой жидкости*. Отметим, что уравнения (5.165) и (5.166) справедливы только вдоль выбранной линии тока, поскольку константы этих уравнений изменяются от одной линии тока к другой.

Сейчас мы покажем, что уравнения (5.165) и (5.166) справедливы во всей жидкости, если течение *безвихревое*. Течение является таковым, если жидкие частицы не вращаются вокруг своих осей. При рассмотрении кинематики поля течения (см., например, [Owczarek, 1964]) завихренность ξ , которая определяется в виде

$$\xi = \nabla \times \mathbf{V}, \quad (5.167)$$

эквивалентна удвоенной угловой скорости вращения жидкой частицы. Таким образом, для безвихревого течения

$$\xi = \nabla \times \mathbf{V} = 0, \quad (5.168)$$

и поэтому мы можем выразить \mathbf{V} через градиент некоторой однозначной функции ϕ положения точки, так как

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (\nabla \phi) = 0. \quad (5.169)$$

Скаляр ϕ называется *потенциалом скорости*. Тогда ускорение жидкой частицы есть

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times \xi. \quad (5.170)$$

Это так называемая *формула Лагранжа для ускорения*. Для безвихревого потока

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right),$$

и подстановка в уравнение Эйлера дает

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (5.171)$$

Если пренебречь массовыми силами и рассматривать стационарное течение, то уравнение (5.171) можно переписать в виде

$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0, \quad (5.172)$$

так как

$$\nabla \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Интегрируя уравнение (5.172) вдоль произвольной линии в поле течения, получаем

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}, \quad (5.173)$$

причем константа в этом уравнении будет иметь одно и то же значение для всего поля течения, так как уравнение (5.173) интегрировалось вдоль произвольной линии тока. Уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости (5.165) и для сжимаемой жидкости (5.166) непосредственно вытекают из уравнения (5.173) тем же самым способом, как и ранее. Единственное различие состоит в том, что они справедливы всюду в поле течения невязкой жидкости вследствие нашего предположения о безвихревом характере течения.

В случае безвихревого течения невязкой несжимаемой жидкости уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (5.174)$$

может быть объединено с выражением

$$\mathbf{V} = \nabla \phi, \quad (5.175)$$

которое приводит к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (5.176)$$

5.5.3. Различные формы записи уравнения энергии для невязкой жидкости

Для невязкой жидкости уравнение энергии (5.22) запишется в виде

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \nabla \cdot E_t \mathbf{V} = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (p \mathbf{V}), \quad (5.177)$$

что эквивалентно

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \nabla \cdot (\rho H \mathbf{V}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (5.178)$$

Дополнительные формы уравнения энергии можно получить из уравнения (5.29)

$$\rho \frac{De}{Dt} + p (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (5.179)$$

и из уравнения (5.33)

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt}. \quad (5.180)$$

Если мы воспользуемся уравнением неразрывности, то, пренебрегая массовой силой в уравнении (5.178), можем записать

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (5.181)$$

что для стационарного течения сводится к уравнению

$$\mathbf{V} \cdot \nabla H = 0. \quad (5.182)$$

Интегрирование этого уравнения вдоль линии тока дает

$$H = h + \frac{V^2}{2} = \text{const}, \quad (5.183)$$

где константа остается одной и той же для всего поля течения в случае изоэнергетического (с постоянной энергией) потока.

Для случая несжимаемой жидкости уравнение (5.179) сводится к уравнению

$$\frac{De}{Dt} = 0, \quad (5.184)$$

что для стационарного течения означает постоянство внутренней энергии вдоль линии тока.

5.5.4. Дополнительные соотношения

В этом параграфе были приведены уравнения сохранения для невязкой жидкости. Можно вывести дополнительные соотношения, которые оказываются полезными в конкретных приложениях. В некоторых случаях ими даже можно пользоваться вместо одного или более уравнений сохранения. Несколько из этих дополнительных уравнений основаны на первом и втором законах термодинамики. Второй закон дает соотношение

$$T ds = de + pd(1/\rho), \quad (5.185)$$

где s — энтропия. Вводя энтальпию $h = e + p/\rho$, запишем (5.185) в виде

$$T ds = dh - dp/\rho. \quad (5.186)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$T \nabla s = \nabla h - \frac{\nabla p}{\rho},$$

поскольку в любой момент времени жидкая частица может менять свое положение относительно соседней жидкой частицы. Комбинируя это уравнение с уравнениями (5.170) и (5.158) и

пренебрегая массовыми силами, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \nabla \times \boldsymbol{\xi} = T \nabla s - \nabla h - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right),$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi} = T \nabla s - \nabla H. \quad (5.187)$$

Уравнение (5.187) известно как *уравнение Крокко*. Оно дает связь между завихренностью и энтропией. Для стационарного течения

$$\mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi} = \nabla H - T \nabla s. \quad (5.188)$$

Ранее мы показали, что в случае стационарного адиабатического течения невязкого газа (уравнение (5.182)) имеем $\mathbf{V} \cdot \nabla H = 0$, что в комбинации с уравнением (5.188) дает $\mathbf{V} \cdot \nabla s = 0$, так как $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\xi}$ нормально к \mathbf{V} . Таким образом, мы доказали, что в случае стационарного адиабатического течения невязкой и нетеплопроводной жидкости энтропия сохраняется вдоль линии тока. Такое течение называется *изэнтропическим*. Если, кроме того, считать его безвихревым и изоэнергетическим, то из уравнения Крокко следует, что энтропия постоянна всюду во всей области течения.

Уравнение (5.185) связывает между собой термодинамические функции, изменения которых определяются исходными и конечными положениями системы, но не зависят от формы пути, по которым система из исходного состояния переходит в конечное. Для изэнтропического течения совершенного газа можно записать

$$T ds = 0 = c_p dT - R \int \frac{dp}{\rho},$$

или

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}.$$

Последнее уравнение может быть проинтегрировано, что дает

$$\frac{p}{T^{\gamma/(\gamma-1)}} = \text{const},$$

что в свою очередь после подстановки уравнения состояния совершенного газа сводится к соотношению

$$p/\rho^\gamma = \text{const}. \quad (5.189)$$

Последнее соотношение для изэнтропического течения было использовано ранее для вывода уравнения Бернулли для сжимаемого газа (5.166). Интересно заметить, что проинтегрированное

уравнение энергии (5.183) может быть сведено к (5.166), если течение считать изэнтропическим.

Скорость звука задается выражением

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}, \quad (5.190)$$

где индекс s указывает на то, что процесс происходит при постоянной энтропии. Для совершенного газа уравнение (5.190) дает

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}. \quad (5.191)$$

5.5.5. Векторная форма уравнений Эйлера

Уравнения Эйлера для сжимаемого газа в отсутствие массовых сил и внешнего тепловыделения могут быть записаны в декартовых координатах

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = 0, \quad (5.192)$$

где векторы \mathbf{U} , \mathbf{E} , \mathbf{F} и \mathbf{G} задаются выражениями

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + p)u \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E_t + p)v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + p)w \end{bmatrix}.$$

Для стационарного изоэнергетического течения совершенного газа уравнение энергии можно исключить из этой системы, записанной в векторной форме, и пользоваться его алгебраической формой (5.166). Это уменьшает затраты времени на вычисления, так как приходится решать на одно уравнение в частных производных меньше.

5.5.6. Упрощенные формы уравнений Эйлера

Делая дополнительные предположения, можно упростить уравнения Эйлера. В случае стационарного безвихревого изэнтропического течения уравнения Эйлера могут быть сведены

к единственному уравнению, называемому *уравнением для потенциала скорости*, которое можно получить таким образом. Уравнение неразрывности в декартовой системе координат можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\phi_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\phi_z) = 0, \quad (5.193)$$

где компоненты скорости заменяются величинами

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z}. \quad (5.194)$$

Уравнения импульса (и энергии) в предположении, что течение стационарное, изэнтропическое и безвихревое, сводятся к уравнению (5.162). Дифференциальная форма этого уравнения выглядит так:

$$d\rho = -\rho d\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\rho d\left(\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2}\right). \quad (5.195)$$

Комбинация уравнений (5.190) и (5.195) приводит к уравнению

$$d\rho = -\frac{\rho}{a^2} d\left(\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2}\right), \quad (5.196)$$

которое можно использовать для определения производных от ρ по всем направлениям. После подстановки ρ_x , ρ_y и ρ_z в уравнение (5.193) и упрощения получаем для потенциала скорости следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right)\phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right)\phi_{yy} + \left(1 - \frac{\phi_z^2}{a^2}\right)\phi_{zz} - \\ - \frac{2\phi_x\phi_y}{a^2}\phi_{xy} - \frac{2\phi_x\phi_z}{a^2}\phi_{xz} - \frac{2\phi_y\phi_z}{a^2}\phi_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (5.197)$$

Заметим, что для несжимаемой жидкости ($a \rightarrow \infty$) уравнение для потенциала скорости сводится к уравнению Лапласа.

Уравнения Эйлера могут быть упрощены еще в большей степени для случая обтекания тонких тел, размеры которых в поперечном направлении столь малы, что эти тела слабо возмущают набегающий поток. Пример такого типа течения — обтекание тонкого профиля. Анализ такого рода течений выполняется при помощи теории малых возмущений. Чтобы показать, как можно упростить в этом случае уравнение потенциала, считаем, что тонкое тело помещается в двумерный поток. Тело возмущает однородный поток, и компоненты скорости записываются как

$$u = U_\infty + u', \quad v = v', \quad (5.198)$$

где штрих обозначает возмущенную скорость. Пусть далее ϕ' — возмущение потенциала, тогда

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = U_\infty + \frac{\partial \phi'}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi'}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.199)$$

Подставляя эти выражения, а также (5.191) в уравнение (5.166), получаем

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2} [2u'U_\infty + (u')^2 + (v')^2], \quad (5.200)$$

что в комбинации с уравнением для потенциала дает

$$\begin{aligned} (1 - M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u'}{U_\infty} + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{(u')^2}{U_\infty^2} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \frac{(v')^2}{U_\infty^2} \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{U_\infty} + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{(v')^2}{U_\infty^2} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \frac{(u')^2}{U_\infty^2} \right] \frac{\partial v'}{\partial y} + M_\infty^2 \frac{v'}{U_\infty} \left(1 + \frac{u'}{U_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5.201)$$

Поскольку возмущения однородного потока являются малыми, то полагаем, что u'/U_∞ , $v'/U_\infty \ll 1$. Тогда уравнение (5.200) упрощается:

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) u' U_\infty, \quad (5.202)$$

и (5.201) принимает вид

$$\left[\frac{1 - M_\infty^2}{M_\infty^2} - (\gamma + 1) \frac{u'}{U_\infty} \right] M_\infty^2 \phi'_{xx} + \phi'_{yy} = 0. \quad (5.203)$$

Последнее уравнение называется *трансзвуковым уравнением малых возмущений*. Тип этого уравнения эллиптический или гиперболический в зависимости от того, каким является течение, дозвуковым или сверхзвуковым.

Для течений на до- или сверхзвуковых режимах величина члена $M_\infty^2 (\gamma + 1) (u'/U_\infty) \phi'_{xx}$ мала по сравнению с $(1 - M_\infty^2) \phi'_{xx}$ и уравнение (5.203) сводится к линейному *уравнению Прандтля—Глауэрта*

$$(1 - M_\infty^2) \phi'_{xx} + \phi'_{yy} = 0. \quad (5.204)$$

Зная возмущенную скорость, можно определить коэффициент давления из соотношения

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) = - \frac{2u'}{U_\infty}, \quad (5.205)$$

которое получено из уравнений (5.166), (5.189), (5.198) и на основе теоремы о разложении бинома.

5.5.7. Ударные волны

Ударные волны представляют собой область течения в виде тонкого слоя в сверхзвуковом течении, в котором происходят большие изменения параметров потока. Поскольку эти изменения происходят на очень малом расстоянии, вязкость и теплопроводность оказывают доминирующее влияние на структуру ударной волны. Если, однако, структура ударной волны сама по себе нас не интересует, то можно считать ее бесконечно тонкой (т. е. с математической точки зрения ударная волна это — разрыв параметров потока) и для определения изменения параметров потока при переходе через ударную волну использовать уравнения Эйлера. Рассмотрим, например, стационарную прямую ударную волну, фронт которой перпендикулярен направлению потока. Вектор скорости двумерного течения направлен в положительном направлении оси x , и параметры потока перед ударной волной будем обозначать индексом 1, а за ударной волной — индексом 2. Поскольку ударная волна есть слабое решение гиперболических уравнений Эйлера, мы можем применить к уравнению (5.192) изложенную в § 4.4 теорию слабых решений. В нашем случае это дает $[E] = 0$, $E_1 = E_2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \\ \rho_1 + \rho_1 u_1^2 &= \rho_2 + \rho_2 u_2^2, \\ \rho_1 u_1 v_1 &= \rho_2 u_2 v_2, \\ (E_1 + p_1) u_1 &= (E_2 + p_2) u_2. \end{aligned}$$

После простых преобразований находим

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \\ \rho_1 + \rho_1 u_1^2 &= \rho_2 + \rho_2 u_2^2, \\ v_1 &= v_2, \\ h_1 + \frac{u_1^2}{2} &= h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \end{aligned} \tag{5.206}$$

Решая эти уравнения относительно перепада давления на ударной волне, получаем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) \rho_2 - (\gamma - 1) \rho_1}{(\gamma + 1) \rho_1 - (\gamma - 1) \rho_2}. \tag{5.207}$$

Это уравнение, связывающее термодинамические параметры по обе стороны от ударной волны, получило название *соотношения Гюгонио — Рэнкина*. Термин соотношения Гюгонио — Рэнкина часто применяется ко всем уравнениям, связывающим параметры потока по обе стороны от ударной волны.

Для ударных волн, расположенных под углом к набегающему потоку, т. е. косых ударных волн, изменения параметров потока задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \rho_1 V_{n_1} &= \rho_2 V_{n_2}, \\ \rho_1 + \rho_1 V_{n_1}^2 &= \rho_2 + \rho_2 V_{n_2}^2, \\ V_{t_1} &= V_{t_2}, \\ h_1 + \frac{V_1^2}{2} &= h_2 + \frac{V_2^2}{2}, \end{aligned} \quad (5.208)$$

где V_n и V_t — нормальная и тангенциальная компоненты скорости соответственно. Эти уравнения можно применять также к движущимся ударным волнам, если компоненты скорости измерять относительно движущейся ударной волны. В этом случае нормальная компонента скорости потока перед ударной волной (измеренная относительно ударной волны) может быть связана с давлением за ударной волной

$$V_{n_1}^2 = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right). \quad (5.209)$$

Последнее соотношение оказывается полезным в численных расчетах, когда движущиеся ударные волны рассматриваются как разрывы (см. гл. 6).

§ 5.6. Преобразование основных уравнений

В настоящей главе приведены классические уравнения динамики жидкости. Они были записаны либо в векторной, либо в тензорной форме. В п. 5.1.7 было показано, как эти уравнения могут быть записаны в любой ортогональной криволинейной системе координат. Во многих задачах удобней, однако, пользоваться неортогональными системами координат. В данном разделе мы покажем, как преобразуется вид уравнений при переходе от декартовой системы координат к неортогональной (или ортогональной) системе координат общего вида. По ходу изложения мы покажем, как можно использовать простые преобразования для сгущения узлов сетки в областях больших градиентов параметров потока (в пограничных слоях) и как преобразовать прямоугольную расчетную область в физической

плоскости к прямоугольной сетке с равномерным размещением узлов в вычислительной плоскости. Эти последние преобразования будут представлены простыми примерами, взятыми из очень важного раздела вычислительной динамики жидкости — методов построения расчетных сеток. Подробно методы построения расчетных сеток будут рассмотрены в гл. 10.

5.6.1. Простые преобразования

В этом разделе простые преобразования переменных применяются для того, чтобы показать, как при этом преобразуется вид уравнений. В качестве первого примера рассмотрим задачу сгущения узлов сетки вблизи стенки. В большинстве случаев

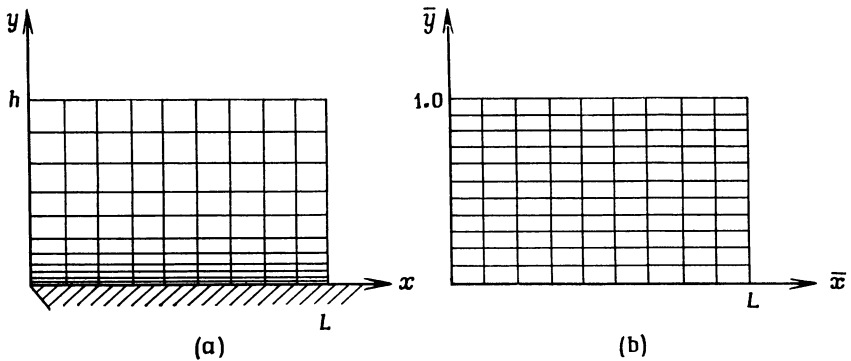


Рис. 5.8. Распределение узлов сетки вблизи стенки. (а) Физическая плоскость (x, y) ; (б) вычислительная плоскость (\bar{x}, \bar{y}) .

измельчение сетки совершенно необходимо для разрешения деталей течения в пограничном слое. На рис. 5.8(а) показана сетка для расчета течения на плоской пластине с однородным размещением узлов по направлению x и со сгущением узлов по направлению y по мере приближения к стенке. Так как шаг сетки по направлению y неравномерный, то удобно преобразовать координату y так, чтобы уравнения можно было решать на равномерной сетке в вычислительной плоскости (\bar{x}, \bar{y}) , как показано на рис. 5.8(б). Подходящим для такой двумерной пограничной задачи является преобразование 1.

Преобразование 1

$$\bar{x} = x,$$

$$\bar{y} = 1 - \frac{\ln \{[\beta + 1 - (y/h)]/[\beta - 1 + (y/h)]\}}{\ln [(\beta + 1)/(\beta - 1)]}, \quad 1 < \beta < \infty. \quad (5.210)$$

Это преобразование растяжения размещает тем большее число точек вблизи $y = 0$, чем ближе параметр β к 1.

Чтобы применить это преобразование к уравнениям динамики жидкости, выпишем следующие частные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}},\end{aligned}\quad (5.211)$$

где

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} &= 1, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{2\beta}{h\{\beta^2 - [1 - (y/h)]^2\} \ln [(\beta + 1)/(\beta - 1)]}.\end{aligned}$$

В результате выражения для частных производных упрощаются:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}}.\end{aligned}\quad (5.212)$$

Если сейчас применить это преобразование к стационарному двумерному уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости, записанному в декартовых координатах

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.213)$$

то преобразованное уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (5.214)$$

Это уравнение можно дискретизировать на равномерной сетке в вычислительной плоскости. Шаги сетки равны

$$\Delta \bar{x} = \frac{L}{NI - 1}, \quad \Delta \bar{y} = \frac{l}{NJ - 1}, \quad (5.215)$$

где NI и NJ — число узлов сетки в направлениях x и y соответственно. Заметим, что в выражении для метрического коэффициента $\partial \bar{y}/\partial y$ содержится y , поэтому мы должны уметь выражать y как функцию \bar{y} . Это называют обратным преобразованием. В нашем примере обратное преобразование легко находится в виде

$$\begin{aligned}x &= \bar{x}, \\ y &= h \frac{(\beta + 1) - (\beta - 1) \{[(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{1-\bar{y}}\}}{[(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{1-\bar{y}} + 1}.\end{aligned}\quad (5.216)$$

Обсуждаемое здесь преобразование растяжения принадлежит к более общему семейству преобразований растяжения [Roberts, 1971]. Другое преобразование этого семейства измель-

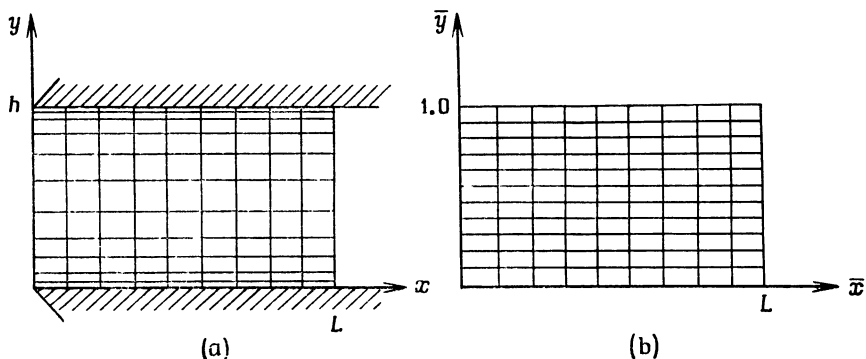


Рис. 5.9. Распределение узлов расчетной сетки в канале. (а) Физическая плоскость (x, y) ; (б) вычислительная плоскость (\bar{x}, \bar{y}) .

чает сетку у стенок канала (рис. 5.9). Оно обозначается как преобразование 2.

Преобразование 2

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x, \\ \bar{y} &= \alpha + (1 - \alpha) \frac{\ln \{ (\beta + [y(2\alpha + 1)/h] - 2\alpha) / (\beta - [y(2\alpha + 1)/h] + 2\alpha) \}}{\ln [(\beta + 1)/(\beta - 1)]}. \end{aligned} \quad (5.217)$$

Если $\alpha = 0$, то сетка будет измельчаться только вблизи $y = h$, тогда как если $\alpha = 1/2$, то сетка будет измельчаться как вблизи $y = 0$, так и вблизи $y = h$. Робертс показал, что параметр растяжения β приблизительно связан с безразмерной толщиной пограничного слоя δ/h следующим образом:

$$\beta = (1 - \delta/h)^{-1/2}, \quad 0 < \delta/h < 1, \quad (5.218)$$

где h — размер сетки в направлении y . Величина растяжения для разных значений δ/h показана на рис. 5.10 для случая $\alpha = 0$. Для преобразования, задаваемого уравнением (5.217), метрика $\partial\bar{y}/\partial y$ есть

$$\frac{\partial\bar{y}}{\partial y} = \frac{2\beta(1 - \alpha)(2\alpha + 1)}{h \{ \beta^2 - [y(2\alpha + 1)/h - 2\alpha]^2 \} \ln [(\beta + 1)/(\beta - 1)]}, \quad (5.219)$$

а обратное преобразование выражается в виде

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}, \\ y &= h \frac{(\beta + 2\alpha) [(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{(\bar{y} - \alpha)/(1 - \alpha)} - \beta + 2\alpha}{(2\alpha + 1) \{ 1 + [(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{(\bar{y} - \alpha)/(1 - \alpha)} \}}. \end{aligned} \quad (5.220)$$

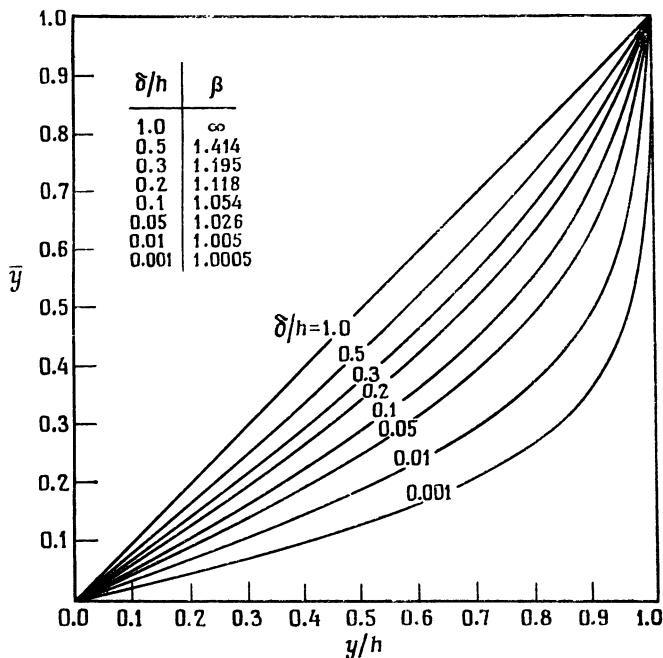


Рис. 5.10. Преобразование растяжения ($\alpha = 0$), предложенное Робертсом.

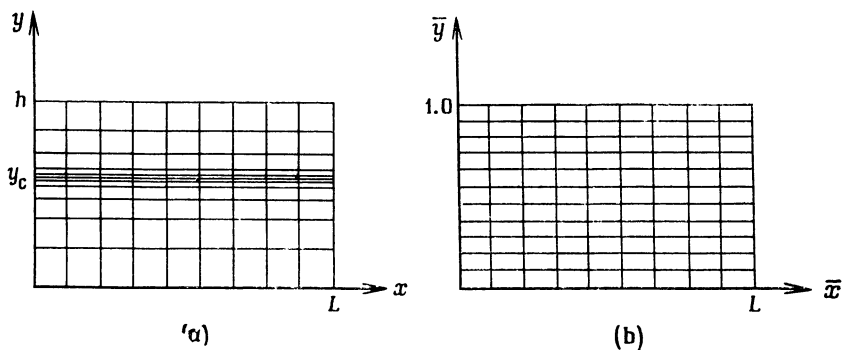


Рис. 5.11. Распределение узлов расчетной сетки со сгущением внутри области. (а) Физическая плоскость (x, y) ; (б) вычислительная плоскость (\bar{x}, \bar{y}) .

Полезным будет преобразование для измельчения сетки вблизи внутренней границы (рис. 5.11).

Преобразование 3

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x, \\ \bar{y} &= B + \frac{1}{\tau} \operatorname{ar sh} \left[\left(\frac{y}{y_c} - 1 \right) \operatorname{sh}(\tau B) \right],\end{aligned}\quad (5.221)$$

где

$$B = \frac{1}{2\tau} \ln \left[\frac{1 + (e^\tau - 1)(y_c/h)}{1 + (e^{-\tau} - 1)(y_c/h)} \right], \quad 0 < \tau < \infty.$$

Здесь параметр растяжения τ изменяется от нуля (нет растяжения) до больших значений, которые производят измельчение

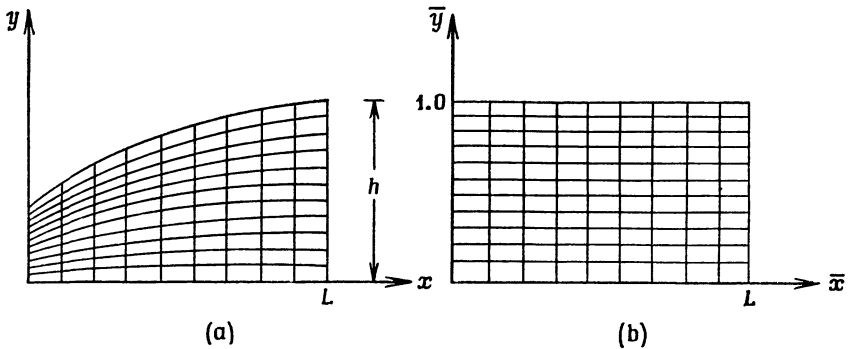


Рис. 5.12. Получение прямоугольной расчетной сетки. (а) Физическая плоскость (x, y) ; (б) вычислительная плоскость (\bar{x}, \bar{y}) .

вблизи $y = y_c$. Метрики $\partial \bar{y} / \partial y$ и y суть

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{\operatorname{sh}(\tau B)}{\tau y_c \sqrt{1 + [(y/y_c) - 1]^2 \operatorname{sh}^2(\tau B)}}, \quad (5.222)$$

$$y = y_c \left\{ 1 + \frac{\operatorname{sh}[\tau(\bar{y} - B)]}{\operatorname{sh}(\tau B)} \right\}. \quad (5.223)$$

В качестве последнего примера рассмотрим простое преобразование, которое переводит непрямоугольную область в физической плоскости в прямоугольную область в вычислительной плоскости, как показано на рис. 5.12. Оно обозначается преобразованием 4.

Преобразование 4

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y/h(x). \quad (5.224)$$

Расстояние между нижней и верхней границами, измеряемое вдоль линии $x = \text{const}$, обозначено через $h(x)$. Необходимые частные производные записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \bar{y} \frac{h'(x)}{h(x)} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{h(x)} \frac{\partial}{\partial \bar{y}},\end{aligned}\quad (5.225)$$

где $h'(x) = dh(x)/dx$. Отсюда двумерное стационарное уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости, записанное в декартовых координатах, преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} - \bar{y} \frac{h'(\bar{x})}{h(\bar{x})} \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{h(\bar{x})} \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (5.226)$$

5.6.2. Преобразование общего вида

Выше мы рассмотрели простые преобразования независимых переменных, которые позволяют решать задачу на равномерной сетке. Рассмотрим теперь преобразование общего вида

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y, z), \\ \eta &= \eta(x, y, z), \\ \zeta &= \zeta(x, y, z),\end{aligned}\quad (5.227)$$

которое отображает физическую плоскость (x, y, z) на вычислительную плоскость (ξ, η, ζ) . По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta}.\end{aligned}\quad (5.228)$$

Возникающие в этих выражениях метрические коэффициенты $\xi_x, \eta_x, \zeta_x, \xi_y, \eta_y, \zeta_y, \xi_z, \eta_z, \zeta_z$ могут быть найдены следующим образом. Запишем сначала выражения для дифференциалов

$$\begin{aligned}d\xi &= \xi_x dx + \xi_y dy + \xi_z dz, \\ d\eta &= \eta_x dx + \eta_y dy + \eta_z dz, \\ d\zeta &= \zeta_x dx + \zeta_y dy + \zeta_z dz,\end{aligned}\quad (5.229)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}. \quad (5.230)$$

Аналогичным образом можно записать

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix}. \quad (5.231)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= J \begin{bmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & -(x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta) & x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta \\ -(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) & x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi & -(x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi) \\ y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi & -(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.232)$$

Следовательно, метрические коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_x &= J(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), \\ \xi_y &= -J(x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta), \\ \xi_z &= J(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta), \\ \eta_x &= -J(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi), \\ \eta_y &= J(x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi), \\ \eta_z &= -J(x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi), \\ \zeta_x &= J(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), \\ \zeta_y &= -J(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi), \\ \zeta_z &= J(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi), \end{aligned} \quad (5.233)$$

где J — якобиан преобразования:

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix}, \quad (5.234)$$

который вычисляется следующим образом:

$$J = 1/J^{-1} = 1 / \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = 1 \left/ \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{vmatrix} \right. = \\ = 1/[x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)]. \quad (5.235)$$

Метрические коэффициенты легко находятся, когда имеется обратное преобразование

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta), \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned} \quad (5.236)$$

В случае когда сетка строится численным путем, они вычисляются численно с использованием центральных разностей в вычислительной плоскости. Подробное обсуждение этого способа расчета метрических коэффициентов отложим до гл. 10.

Если применить преобразование координат общего вида к уравнениям Навье—Стокса для сжимаемого газа (5.44), записанным в векторной форме, то получим следующее преобразованное уравнение:

$$\begin{aligned} U_t + \xi_x E_\xi + \eta_x E_\eta + \zeta_x E_\zeta + \xi_y F_\xi + \eta_y F_\eta + \zeta_y F_\zeta + \\ + \xi_z G_\xi + \eta_z G_\eta + \zeta_z G_\zeta = 0. \end{aligned} \quad (5.237)$$

Вивьян [Viviani, 1974] и Винокур [Vinokur, 1974] показали, что уравнения газовой динамики могут быть записаны в строго дивергентной форме при помощи некоторого преобразования координат. Для этого разделим сначала преобразованное уравнение на якобиан и перегруппируем его, добавляя и вычитая одинаковые члены. Для уравнения (5.237) это даст

$$\begin{aligned} \left(\frac{U}{J}\right)_t + \left(\frac{E\xi_x + F\xi_y + G\xi_z}{J}\right)_\xi + \left(\frac{E\eta_x + F\eta_y + G\eta_z}{J}\right)_\eta + \\ + \left(\frac{E\zeta_x + F\zeta_y + G\zeta_z}{J}\right)_\zeta - E\left[\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_\xi + \left(\frac{\eta_x}{J}\right)_\eta + \left(\frac{\zeta_x}{J}\right)_\zeta\right] - \\ - F\left[\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_\xi + \left(\frac{\eta_y}{J}\right)_\eta + \left(\frac{\zeta_y}{J}\right)_\zeta\right] - \\ - G\left[\left(\frac{\xi_z}{J}\right)_\xi + \left(\frac{\eta_z}{J}\right)_\eta + \left(\frac{\zeta_z}{J}\right)_\zeta\right] = 0. \end{aligned} \quad (5.238)$$

Последние три члена в квадратных скобках равны нулю. Это легко проверить, подставляя в них выражения для метрик

(5.233). Если теперь определить величины

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \frac{\mathbf{U}}{J}, \\ \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{J} (\mathbf{E}\xi_x + \mathbf{F}\xi_y + \mathbf{G}\xi_z), \\ \mathbf{F}_1 &= \frac{1}{J} (\mathbf{E}\eta_x + \mathbf{F}\eta_y + \mathbf{G}\eta_z), \\ \mathbf{G}_1 &= \frac{1}{J} (\mathbf{E}\zeta_x + \mathbf{F}\zeta_y + \mathbf{G}\zeta_z) \end{aligned} \quad (5.239)$$

и подставить их в уравнение (5.238), то уравнение в строго дивергентной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \zeta} = 0. \quad (5.240)$$

Необходимо помнить, что векторы \mathbf{E}_1 , \mathbf{F}_1 и \mathbf{G}_1 содержат частные производные в членах с вязкостью и теплопроводностью, которые должны быть преобразованы в соответствии с уравнениями (5.228). Например, сдвиговые напряжения τ_{xy} будут преобразованы к виду

$$\tau_{xy} = \mu \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right). \quad (5.241)$$

Строго дивергентная форма записи уравнений удобна при составлении разностных схем. Следует, однако, быть внимательным при ее использовании на сетках с переменным шагом. В этом случае во избежание внесения ошибок в решение при дискретизации метрик необходимо соблюсти ограничение, называемое *геометрическим законом сохранения* (Thomas, Lombard, 1978]. Оно будет обсуждено в гл. 10.

Задачи

- 5.1. Проверьте равенство (5.9).
- 5.2. Покажите, что для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами уравнение (5.18) сводится к уравнению (5.21).
- 5.3. Проверьте равенство (5.30).
- 5.4. Используя процедуру обезразмеривания, описанную в п. 5.1.6, выведите уравнение (5.47).
- 5.5. Запишите уравнение энергии (5.33) для осесимметричного течения в координатах, связанных с телом.
- 5.6. Запишите уравнение Навье — Стокса (5.21) для несжимаемой жидкости в сферической системе координат.

5.7. Покажите, что $\overline{\rho' u''} = \overline{\rho' u'}$.

5.8. Покажите, что $\bar{u} - \bar{u} = \overline{\rho' u' / \rho}$.

5.9. Проверьте, что $\overline{u''} = -\overline{\rho' u'' / \rho}$.

5.10. Исходя из уравнения (5.80), покажите все шаги получения уравнения (5.81).

5.11. Получите уравнение (5.84) подстановкой $c_p \bar{T} = \bar{H} - \bar{u}_i \bar{u}_i / 2$ в уравнение (5.81).

5.12. Покажите все этапы получения уравнения (5.76) из уравнений Навье — Стокса.

5.13. Оцените по порядку величин члены двумерного уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости в случае двумерной ламинарной струи и покажите, какими членами можно пренебречь.

5.14. Объясните, почему уравнения пограничного слоя можно применять в случае развивающегося течения в трубе.

5.15. Укажите граничные условия для уравнений тонкого сдвигового слоя для случая двумерного сдвигового слоя, образованного слиянием двух одно-родных потоков со скоростями U_a и U_b .

5.16. Уравнения пограничного слоя (5.104) — (5.106) были получены для чисел Прандтля порядка единицы. Для ламинарного течения на нагреваемой плоской пластине покажите, какие изменения в эти уравнения следует внести, чтобы они были пригодны для чисел Прандтля порядка ϵ , ϵ^2 , $1/\epsilon$, $1/\epsilon^2$.

5.17. Используя уравнения Навье — Стокса, получите точные уравнения переноса рейнольдсовых напряжений для несжимаемого турбулентного пограничного слоя, т. е. получите выражения для $\overline{\rho D u_i' u_j'} / Dt$. Покажите все этапы процедуры.

5.18. Используя выражения для переноса напряжений Рейнольдса из задачи 5.17, положите в них $i = j$, чтобы получить выражение для переноса кинетической энергии турбулентности.

5.19. Используя модельные формы уравнения кинетической энергии турбулентности (5.147), покажите, что, когда конвекция и диффузия кинетической энергии турбулентности пренебрежимо малы, то модель кинетической энергии турбулентности сводится к формуле Прандтля для длины пути смешения.

5.20. Полагая, что конвекция и диффузия кинетической энергии турбулентности малы внутри области логарифмического закона скорости для пристенного турбулентного пограничного слоя, найдите выражение для кинетической энергии турбулентности на внешней границе области логарифмического закона скорости в терминах сдвиговых напряжений на стенке. Сравните эту оценку с экспериментальными измерениями \bar{k} , которые выполнил Клебановф (см. [Hinze, 1975]).

5.21. Считая формулу Прандтля длины пути смешения справедливой для пристенного турбулентного пограничного слоя, получите выражение для отношения кажущейся турбулентной вязкости к молекулярной вязкости для области логарифмического закона.

5.22. Проверьте граничное условие для \bar{k} на внутренней границе, задаваемое уравнением (5.148).

5.23. Определите функцию тока стационарного двумерного течения сжимаемой жидкости, рассматриваемого в связанных с поверхностью тела координатах.

5.24. Получите уравнение (5.220).

5.25. Проверьте уравнения (5.222) и (5.223).

5.26. Преобразуйте двумерные уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости (5.21), используя преобразование (5.217).

5.27. Покажите, что преобразование

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

будет переводить трехмерное уравнение неразрывности сжимаемого газа, записанное в цилиндрических координатах, в уравнение неразрывности, записанное в декартовых координатах.

5.28. Последовательно примените преобразования (5.224) и (5.210) к уравнению энергии вязкого газа (5.179), записанному для стационарного двумерного течения.

5.29. Преобразуйте двумерное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

к вычислительной плоскости (τ, ξ, η) , используя преобразование

$$\tau = t, \quad \xi = \xi(t, x, y), \quad \eta = \eta(t, x, y).$$

Воспользуйтесь методикой Вивьяна, чтобы записать преобразованное уравнение в дивергентной форме.

5.30. Преобразуйте стационарные уравнения Эйлера (5.192) к координатам (ξ, η, ζ) , используя преобразование

$$\xi = x, \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z).$$

Воспользоваться методикой Вивьяна, чтобы записать преобразованные уравнения в дивергентной форме.

5.31. Рассмотрите преобразование

$$\begin{aligned} \tau &= t, \\ \xi &= \xi(t, x, y, z), \\ \eta &= \eta(t, x, y, z), \\ \zeta &= \zeta(t, x, y, z). \end{aligned}$$

(а) Определите выражения для якобиана этого преобразования, а также для метрических коэффициентов.

(б) Выполните это преобразование для уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа, записанных в векторной форме (5.44).

Численные методы решения уравнений течения невязкой жидкости

6.1. Введение

Уравнения Навье — Стокса описывают течения жидкости в задачах как внутренней, так и внешней аэродинамики. Численное решение уравнений Навье — Стокса зачастую невозможно или по крайней мере не представляет практического интереса, а во многих задачах в нем просто нет необходимости. Результаты, полученные из решения уравнений Эйлера, имеют практическую значимость на стадии предварительного проектирования, когда требуется только знание распределения давления. В задачах расчета трения и теплопередачи решение уравнений пограничного слоя дает адекватные результаты. Однако на первом этапе анализа требуется найти граничные условия на внешней границе опять-таки из решения уравнений течения невязкой жидкости.

Уравнения Эйлера представляют и самостоятельный интерес, поскольку в них содержатся основные элементы динамики жидкости. Например, в течениях жидкости часто возникают внутренние разрывы, такие, как ударные волны или контактные разрывы. Известные соотношения Гюгонио — Рэнкина связывают конечные параметры газа по обе стороны от ударной волны. Эти соотношения содержатся в решениях уравнений Эйлера.

Уравнения Эйлера описывают течения невязкого нетеплопроводного газа и имеют различный тип при разных режимах течения. Если в них сохранены зависящие от времени члены, то тип получающихся нестационарных уравнений гиперболический для любых чисел Маха и они могут быть решены с использованием маршевых по времени процедур. Совсем другая ситуация имеет место при рассмотрении стационарных течений. В этом случае тип уравнений Эйлера эллиптический на дозвуковых режимах течения и гиперболический на сверхзвуковых.

Этот факт изменения типа уравнений послужил толчком к развитию методов решения задач стационарной трансзвуковой аэродинамики, длившемуся многие годы. Для расчета течений невязкой жидкости используются многочисленные упрощенные версии уравнений Эйлера. Для случая несжимаемых жидкостей часто пользуются допущением о безвихревом характере течения. При этом решение уравнения Лапласа для потенциала

скорости обеспечивает необходимую информацию. Связана с уравнениями Эйлера и система уравнений для малых возмущений. Для дозвуковых и сверхзвуковых течений уравнение Прандтля—Глауэрта дает хорошее приближение первого порядка для потенциала. Для трансзвуковых течений уравнение малых возмущений остается нелинейным. В табл. 6.1 приведена классификация уравнений движения невязкой жидкости.

Таблица 6.1. Классификация уравнений Эйлера

	Дозвуковое течение, $M < 1$	Течение со скоростью звука, $M = 1$	Сверхзвуковое течение, $M > 1$
Стационарное Нестационарное	Эллиптическое Гиперболическое	Параболическое Гиперболическое	Гиперболическое Гиперболическое

Для решения уравнений Эйлера или любых их видоизменений используются самые разные методы. Основная цель настоящей главы — представить получившие наибольшее распространение методы решения задач течения невязкой жидкости. Так как для нас наибольший интерес представляют конечно-разностные методы, то многие другие методы, интенсивно применяющиеся в последнее время, мы не рассматриваем. Наиболее известным среди них является метод конечных элементов. Он широко применяется для расчетов течений несжимаемой жидкости вокруг конфигураций различной формы.

§ 6.2. Метод характеристик

В общем случае решений нелинейных гиперболических уравнений в частных производных в аналитическом виде не существует, поэтому приходится прибегать к численным методам для их решения. Старейшим из них является метод характеристик, который наиболее близок к точному решению гиперболических уравнений в частных производных. Даже если этот метод заменяется новыми наиболее легко реализуемыми конечно-разностными методами, тем не менее в основе этих методов лежат теория характеристик и ее приложения.

В гл. 2 мы выяснили, что с гиперболическими уравнениями связаны некоторые направления или поверхности, которые определяют области влияния. Сигналы распространяются вдоль этих выделенных поверхностей, влияя на решения в других точках внутри областей влияния. Метод характеристик использует известное физическое поведение решения в каждой точке течения. Понять существенные свойства метода характеристик можно на примере исследования линейного уравнения в частных производных второго порядка.

6.2.1. Линейные системы

Рассмотрим стационарное сверхзвуковое течение невязкого нетеплопроводного совершенного газа. Допустим, что помещенное в однородный набегающий поток тонкое тело только слегка возмущает его, так что течение удовлетворяет предположениям о малых возмущениях (см. п. 5.5.6) $u/U_\infty \ll 1$, $v/U_\infty \ll 1$, где u и v — возмущенные компоненты скорости. Если исключить из рассмотрения трансзвуковые и гиперзвуковые течения, основные уравнения сводятся к уравнению Прандтля — Глауэрта для сверхзвукового течения. Если ось x направлена вдоль скорости невозмущенного потока, это уравнение можно записать в виде

$$(1 - M_\infty^2) \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0. \quad (6.1)$$

Число Маха набегающего потока обозначено через M_∞ , а возмущенный потенциал скорости — через ϕ . Начальные условия задаются на гладкой кривой C . В нашем случае в качестве этой кривой принимается прямая $x = \text{const}$. Граничные условия задаются на $y = 0$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = U_\infty \left(\frac{dy}{dx} \right)_w, \quad \phi(0, y) = 0. \quad (6.2)$$

Чтобы сформулировать задачу для системы уравнений, удобно рассмотреть постановку задачи, почти эквивалентную введенной в гл. 2. Используя возмущенные компоненты скорости

$$u = \partial \phi / \partial x, \quad v = \partial \phi / \partial y$$

и обозначение $\beta^2 = M_\infty^2 - 1$, уравнение (6.1) можно представить в виде системы

$$\begin{aligned} \beta^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, y) = 0, \quad v(0, y) = 0, \quad y > 0, \\ v(x, 0) = v_w, \quad y = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Чтобы использовать метод характеристик, систему (6.3) следует записать вдоль характеристик. Итак, на первом этапе этой процедуры выписываются уравнения для характеристик.

Пусть начальные условия этой задачи заданы на гладкой кривой C . Рассмотрим методы построения решения уравнения (6.3) вблизи этой кривой. Если решение достаточно гладкое, то первый метод, который следует рассмотреть, состоит в разложе-

нии в ряд Тейлора в некоторой точке, лежащей на кривой C . Пусть мы интересуемся решением в малой окрестности этой точки, поэтому оставляем в разложении в ряд только члены с первыми производными. Тогда решение для u либо для v может быть записано в виде

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \dots \quad (6.5)$$

В этом выражении точка с координатами (x, y) находится на кривой, где заданы начальные данные для u и v , т. е. u и v известны на кривой C . Требуется вычислить первые производные в разложении в ряд Тейлора. Если через s обозначать длину дуги вдоль кривой C , то можно записать

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds}, \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Система из четырех уравнений для неизвестных производных (6.3) и (6.6) может быть решена любым стандартным методом, например по правилу Крамера. Очевидно, что определитель коэффициентов этой системы не должен обращаться в нуль. Если это происходит, то кривая C совпадает с одной из характеристик системы и в соответствии с материалом, изложенным в гл. 2, производные нельзя определить однозначно. Уравнения характеристик получаются из приравнивания нулю определителя системы:

$$\begin{vmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.7)$$

Раскрывая этот определитель и решая характеристическое уравнение, получаем выражения

$$dy/dx = \pm 1/\beta, \quad (6.8)$$

которые являются дифференциальными уравнениями характеристик, показанных на рис. 6.1. Так как β — константа, то эти уравнения можно проинтегрировать, что дает

$$\xi = x - \beta y, \quad \eta = x + \beta y. \quad (6.9)$$

Исходные дифференциальные уравнения, записанные вдоль характеристик, называются *уравнениями совместности*. Их можно вывести, решая исходную систему уравнений для первых производных. Вдоль характеристических направлений определитель коэффициентов системы обращается в нуль. Если мы ищем решение для любой из первых производных, например для du/dx , и требуем, чтобы они были по крайней мере ограниченными, то

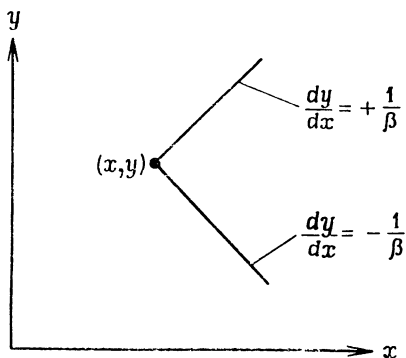


Рис. 6.1. Характеристики уравнения Прандтля — Глауэрта.

должен обращаться в нуль и определитель матрицы, образованной любыми четырьмя столбцами расширенной матрицы. Это может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{du}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 & 0 \\ \frac{dv}{ds} & 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.10)$$

Раскрывая этот определитель, получаем уравнения совместности

$$\frac{du}{ds} = \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dv}{ds}$$

или

$$\frac{d}{ds} (\beta u + v) = 0 \quad (6.11)$$

вдоль распространяющейся вправо характеристики $dy/dx = = -1/\beta$ и

$$\frac{d}{ds} (\beta u - v) = 0 \quad (6.12)$$

вдоль распространяющейся влево характеристики $dy/dx = 1/\beta$.

Более общая процедура отыскания характеристик описана в книге Уизема [Whitham, 1974]. Ниже мы приведем детали этой процедуры, опуская выкладки. Чтобы найти характеристики системы (6.3), запишем эти уравнения в векторном виде

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + [A] \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = 0, \quad (6.13)$$

где

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\beta^2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Собственными значениями этой системы являются собственные значения матрицы $[A]$. Последние определяются корнями характеристического уравнения матрицы $[A]$. Итак, мы записываем

$$|[A] - \lambda [I]| = 0 \quad \text{или} \quad 2 \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{\beta^2} \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это приводит к квадратному уравнению $\lambda^2 - 1/\beta^2 = 0$, корни которого суть $\lambda_1 = 1/\beta$, $\lambda_2 = -1/\beta$.

Эта пара корней образует дифференциальные уравнения характеристик (6.8), которые мы уже вывели. Так как исходное уравнение Прандтля — Глауэрта есть всего лишь волновое уравнение для ϕ , мы могли бы выписать дифференциальные уравнения характеристик, используя результаты нашего обсуждения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (2.15). Следующий шаг состоит в получении уравнений совместности. Следуя Уизему, эти уравнения можно получить, умножая систему (6.13) на левый собственный вектор матрицы $[A]$. Это приводит к уравнениям, записанным вдоль характеристик.

Пусть \mathbf{L}^1 — левый собственный вектор матрицы $[A]$, отвечающий λ_1 , и \mathbf{L}^2 — левый собственный вектор, отвечающий λ_2 . Собственные векторы матрицы $[A]$ находим из уравнения

$$[\mathbf{L}^i]^T [A - \lambda_i I] = 0. \quad (6.15)$$

Если положить

$$\mathbf{L}^1 = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix},$$

то

$$[l_1^1, l_2^1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta^2} \\ -1 & -\frac{1}{\beta} \end{bmatrix} = 0.$$

Это приводит к уравнениям

$$\frac{l_1^1}{\beta} + l_2^1 = 0, \quad \frac{l_1^1}{\beta^2} + \frac{l_2^1}{\beta} = 0,$$

которые эквивалентны, как и ожидалось. Поскольку мы можем получить только нормализованные компоненты вектора \mathbf{L}^1 , положим $l_1^1 = -\beta$. Тогда

$$l_2^1 = 1, \quad \mathbf{L}^1 = \begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом находим

$$\mathbf{L}^2 = \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Записывая систему (6.13) вдоль характеристик, получим теперь уравнения совместности. Для этого умножим уравнение (6.13) на транспонированный левый собственный вектор:

$$[\mathbf{L}^i]^T [\mathbf{w}_x + [A] \mathbf{w}_y] = 0. \quad (6.16)$$

В соответствии с уравнением (6.15) член $[\mathbf{L}^i]^T [A]$ можно заменить на $[\mathbf{L}^i]^T \lambda_i [I]$. Поэтому мы можем переписать уравнение (6.16) в виде

$$[\mathbf{L}^i]^T [\mathbf{w}_x + \lambda_i \mathbf{w}_y] = 0.$$

Уравнение совместности вдоль λ_1 получают из соотношения

$$[-\beta, 1] \begin{bmatrix} u_x + \frac{1}{\beta} u_y \\ v_x + \frac{1}{\beta} v_y \end{bmatrix} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x} (\beta u - v) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} (\beta u - v) = 0. \quad (6.17a)$$

Аналогичным образом уравнение совместности вдоль правой характеристики записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (\beta u + v) - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} (\beta u + v) = 0. \quad (6.17b)$$

Уравнение (6.17a) справедливо вдоль положительной, или левой, характеристики. Оно выражает тот факт, что величина $(\beta u - v)$ остается постоянной вдоль характеристики, отвечающей

λ_1 . Это легко показать, считая s расстоянием, измеряемым вдоль характеристики, и записывая

$$\frac{d}{ds}(\beta u - v) = \frac{\partial}{\partial x}(\beta u - v) \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y}(\beta u - v) \frac{dy}{ds}.$$

Однако если $(\beta u - v)$ постоянна вдоль характеристики, то можно записать

$$\frac{d}{ds}(\beta u - v) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(\beta u - v) + \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{\partial}{\partial y}(\beta u - v) = 0,$$

что есть не что иное, как уравнение (6.17а). Таким образом, мы приходим к выводу, что $(\beta u - v)$ постоянна вдоль характеристики, отвечающей собственному числу λ_1 , а величина $(\beta u + v)$

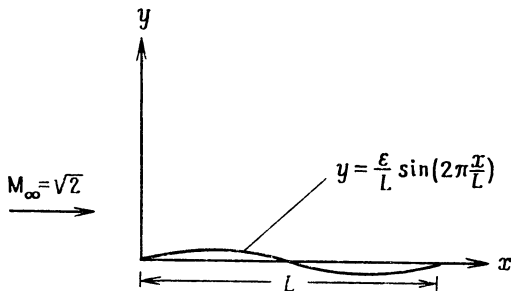


Рис. 6.2. Волнистая стенка в виде одного периода синусоиды.

постоянна вдоль характеристики λ_2 . Величины $(\beta u - v)$ и $(\beta u + v)$ называются *инвариантами Римана* (см. [Garabedian, 1964]). Так как эти две величины постоянны на распространяющихся в противоположные стороны характеристиках, легко определить u и v в заданной точке. Если величины $(\beta u + v)$ и $(\beta u - v)$ известны в некоторой точке (x, y) , мы сразу же находим u и v в этой точке. Рассмотрим пример расчета по методу характеристик.

Пример 6.1. Однородное сверхзвуковое ($M_\infty = \sqrt{2}$) течение невязкой жидкости в ударной трубе натекает на неровность стенки в виде одного периода синусоиды. Такая конфигурация изображена на рис. 6.2. Амплитуда синусоиды равна ϵ и $\epsilon/L \ll \ll 1$. Определить возмущенные скорости u и v , используя метод характеристик.

Решение. Так как течение по условиям задачи отвечает требованиям о малости возмущений, то при решении задачи можно пользоваться уравнением Прандтля — Глауэрта. Итак, будем решать систему уравнений (6.3) для возмущенных компонент скорости u и v . В этом случае $\beta_2 = 1$ и система выглядит так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

с начальными условиями

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{вдоль} \quad x = 0, \quad y > 0$$

и граничными условиями, заданными на стенке (см. § 6.4):

$$v = 2\pi \frac{v}{L^2} \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Так как задача двумерная и решается в рамках теории малых возмущений, можно перенести граничные условия на плоскость $y = 0$. Это во многом облегчает задачу.

Начнем с того, что нарисуем характеристики, берущие свое начало на поверхности задания начальных данных $x = 0$. На левой характеристике

$$dy/dx = 1, \quad u - v = P = \text{const},$$

тогда как на правой характеристике

$$dy/dx = -1, \quad u + v = Q = \text{const}.$$

Следовательно, мы определяем u и v в любой точке:

$$u = (P + Q)/2, \quad v = (Q - P)/2.$$

Так как правые характеристики, пересекающие поверхность, исходят из невозмущенного потока, то начальное значение переменной Q равно нулю. Кроме того, $P = 0$ для характеристик, исходящих из невозмущенного потока (рис. 6.3).

Рассмотрим характеристики, которые пересекают волнистую стенку. Распространяющаяся вверх, или левая, характеристика приходит в некоторую точку так, что приносит в нее граничное условие с поверхности волнистой стенки, т. е. в некоторой точке x_1 мы имеем

$$Q = u + v = 0, \quad v = \frac{2\pi v}{L^2} \cos\left(2\pi \frac{x_1}{L}\right),$$

Следовательно,

$$u = -\frac{2\pi v}{L^2} \cos\left(2\pi \frac{x_1}{L}\right),$$

$$P = u - v = -\frac{4\pi e}{L^2} \cos\left(2\pi \frac{x_1}{L}\right).$$

Решение для u и v строится в соответствии с маршевой процедурой по направлению x , исходя из плоскости задания начальных данных. На рис. 6.4 показана сетка с нумерацией узлов

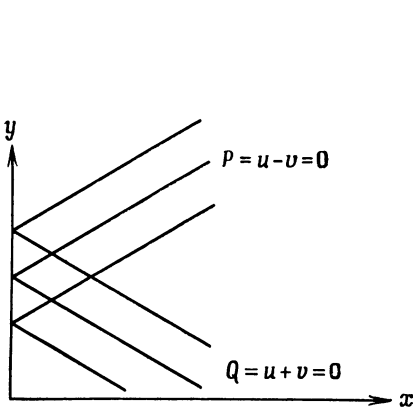


Рис. 6.3. Линия задания начальных данных.

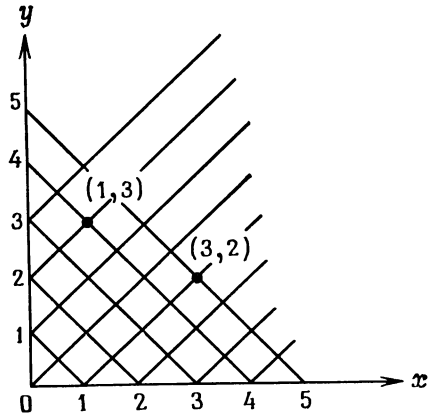


Рис. 6.4. Расчетная сетка, узлы которой являются точками пересечения характеристик.

и соответствующие характеристики. Теперь на пересечении характеристик мы можем получить решение. В точке $(1, 3)$

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad u = 0, \quad v = 0.$$

В точке $(3, 2)$

$$P = -\frac{4\pi e}{L^2} \cos\left(2\pi \frac{x_1}{L}\right), \quad Q = 0,$$

$$u = -\frac{2\pi e}{L^2} \cos\left(2\pi \frac{x_1}{L}\right), \quad v = \frac{2\pi e}{L^2} \cos\left(2\pi \frac{x_1}{L}\right).$$

Таким образом, мы получили решение во всей интересующей нас области. Оно может быть проверено непосредственным решением уравнения Прандтля — Глауэрта для потенциала скорости, по которому затем находят u и v .

6.2.2. Нелинейные системы

До сих пор мы рассматривали систему из двух линейных уравнений, которая была выбрана ради простоты. В более сложных нелинейных задачах решение получают уже не так легко.

В общем случае наклон характеристик уже не постоянный, а меняется в соответствии с изменением свойств жидкости. Входящие в систему уравнения могут быть неоднородными. Ясно, что в этом случае уравнения совместности уже невозможно проинтегрировать в аналитическом виде вдоль характеристик. В общем случае нелинейной задачи как уравнения совместности, так и уравнения характеристик приходится решать численно, чтобы получить полную картину течения. При этом неизвестны не только параметры потока, но также и положения характеристик должны определяться путем численного решения.

Чтобы показать различия в применении метода характеристик в случае линейной и нелинейной задач, рассмотрим двумерное сверхзвуковое течение совершенного газа на плоской пластине. Для простоты выберем прямоугольную систему координат и запишем уравнения Эйлера в матричной форме (см. гл. 5)

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + [A] \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = 0, \quad (6.18)$$

где

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \rho \end{bmatrix},$$

$$[A] = \frac{1}{u^2 - a^2} \begin{bmatrix} uv & -a^2 & -\frac{v}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{v}{u}(u^2 - a^2) & \frac{u^2 - a^2}{\rho u} & 0 \\ -\rho v a^2 & \rho u a^2 & uv & 0 \\ -\rho v & \rho u & \frac{v}{u} & \frac{v}{u}(u^2 - a^2) \end{bmatrix}.$$

Начальные условия \mathbf{I} заданы и записываются в виде

$$\mathbf{w}(0, y) = \mathbf{I}(y), \quad 0 \leq y \leq h.$$

Граничные условия для нашей задачи имеют вид

$$\begin{aligned} v(x, 0) = 0, \quad u(x, h) = u_\infty, \quad v(x, h) = v_\infty, \\ p(x, h) = p_\infty, \quad \rho(x, h) = \rho_\infty. \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы $[A]$ определяют характеристические направления и должны быть найдены в первую

очередь. Находим

$$\lambda_1 = v/u, \quad \lambda_2 = v/u, \quad (6.19a)$$

$$\lambda_3 = \frac{uv + a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{u^2 - a^2}, \quad \lambda_4 = \frac{uv - a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{u^2 - a^2}.$$

Выпишем матрицу, составленную из левых собственных векторов, отвечающих данным собственным значениям λ :

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\rho u}{a^2} & \frac{\rho v}{a^2} & 0 & 1 \\ \rho u & \rho v & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}} & \frac{u}{v} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}} & \frac{1}{\rho a} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}} & \frac{u}{v} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}} & \frac{1}{\rho a} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.19b)$$

Умножая исходную систему (6.18) на $[T]^{-1}$, получаем соотношения совместности. Эти соотношения задаются в виде

$$-v \frac{du}{ds_3} + u \frac{dv}{ds_3} + \frac{\beta}{\rho} \frac{d\rho}{ds_3} = 0 \quad (6.20)$$

вдоль $dy/dx = \lambda_3$ и

$$v \frac{du}{ds_4} - u \frac{dv}{ds_4} + \frac{\beta}{\rho} \frac{d\rho}{ds_4} = 0 \quad (6.21)$$

вдоль $dy/dx = \lambda_4$. В этих выражениях

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1}, \quad M^2 = \frac{u^2 + v^2}{a^2}.$$

Уравнение (6.20) является обыкновенным дифференциальным уравнением, которое удовлетворяется вдоль характеристики с наклоном λ_3 . Длина дуги вдоль этой характеристики обозначена через s_3 . Смысл выражения (6.21) аналогичен. В противоположность рассмотренному ранее примеру решения линейного уравнения Прандтля — Глауэрта аналитическое решение для характеристик в общем случае нелинейной задачи неизвестно. Ясно, что мы должны определять форму характеристик путем пошагового численного интегрирования. Рассмотрим характеристику, определяемую λ_3 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv + a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{u^2 - a^2}.$$

Начиная с поверхности, на которой заданы начальные условия, это выражение можно проинтегрировать и получить последую-

щую точку на кривой. Одновременно с этим можно проинтегрировать дифференциальное уравнение, определяющее другую характеристику волнового фронта. Интегрируя простое дифференциальное уравнение первого порядка, получаем два уравнения для определения волнового фронта характеристик. По ним находят координаты точки их пересечения (точка A на рис. 6.5). Зная положение точки A , интегрируем уравнения совместности (6.20) и (6.21) вдоль характеристик, проходящих через эту точку. Это дает систему уравнений для неизвестных в точке A . Безусловно, требуются дополнительные соотношения для замыкания задачи, которые можно получить, интегрируя уравнения

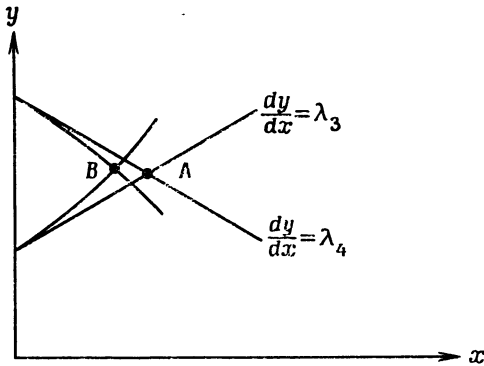


Рис. 6.5. Характеристики в точке, где определяется решение.

совместности вдоль линий тока или используя другие уравнения, связывающие неизвестные в точке A .

Применяя эту процедуру, можно в первом приближении определить положение точки A и параметры потока в ней. Эта оценка обычно используется на первом шаге схемы предиктор-корректор при решении системы гиперболических уравнений в частных производных методом характеристик. На шаге корректор новое положение точки B пересечения характеристик можно рассчитать уже с учетом нелинейной природы характеристических кривых. Аналогично рассчитываются значения зависимых переменных в точке B .

Нахождение решения в точке B представляет собой интересную задачу. Поскольку задача нелинейная, окончательное положение точки пересечения B вовсе необязательно имеет одну и ту же координату x для всех точек решения. Поэтому решение обычно интерполируется на поверхность $x = \text{const}$, прежде чем переходят к следующему шагу интегрирования. Это ведет к усложнению логики при кодировании программы вычислений.

Проблемы интегрирования уравнений совместности и постановки граничных условий как на проницаемых, так и на непроницаемых поверхностях будут обсуждаться в следующем параграфе. Следует отчетливо представлять, что граничное условие типа стенки является итеративным в том смысле, что мы пытаемся удовлетворить конкретному граничному условию в точке на поверхности, координата x которой нам изначально неизвестна.

Рассмотренную в этом разделе задачу в настоящее время можно решать при помощи характеристик гораздо более простым методом (см. § 6.4). Основной причиной вышеприведенного обсуждения было показать идеи, лежащие в основе численных расчетов уравнений движения с использованием методов характеристик, и присущие этим методам трудности. Имеется обширная библиография ([Owczarek, 1964; Shapiro, 1953; Cougant, Friedrichs, 1948]), в которой метод характеристик описан более подробно.

§ 6.3. Методы сквозного счета

Методы сквозного счета широко применяются для расчета течений невязкого газа с ударными волнами. В этом случае уравнения Эйлера записываются в дивергентной форме и для расчета скачков уплотнения или любых других разрывов не принимается никаких специальных мер, они получаются как часть решения всей задачи. Рассчитанные этими методами скачки «размазываются» на несколько ячеек сетки, но простота этого подхода может оказаться решающим фактором при сравнении со *схемами с выделением скачков*, несмотря на то что последние дают несколько более точные результаты.

При расчетах течений методами сквозного счета часто пользуются выделением скачка на границе. Поскольку на границах скачки могут быть выделены по любой из обычных схем, обсуждаемых в настоящем параграфе и в § 6.4, то на самом деле преимущество схем сквозного счета становится еще более ощутимым, когда имеется сложная структура скачков. В этом случае удается уловить структуру скачков и отпадает необходимость в специальной обработке каждого скачка.

Лакс [Lax, 1954] показал, что скорость и интенсивность скачка рассчитываются верно, если уравнения Эйлера записаны в дивергентной форме. Это означает, что физически корректное слабое решение, соответствующее соотношениям Гюнио — Рэнкина на скачках, получается в случае, когда используется дивергентная форма записи уравнений Эйлера и последние дискретизируются консервативным образом. В § 6.4 мы получим сла-

бое решение уравнений Эйлера, используя их недивергентную форму записи, и покажем, что в этом случае разрыв решения с физической точки зрения уже не интерпретируется как ударная волна. Таким образом, вид получаемого решения зависит от формы представления решаемых уравнений.

Дивергентную форму записи проиллюстрируем на примере сверхзвукового обтекания совершенным газом некоторой двумерной поверхности. Если считать, что ось x совпадает с поверхностью тела и эта координата является маршевой, то уравнения, описывающие это течение, являются двумерной версией уравнений (5.192) и их можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) = 0, \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (p + \rho v^2) = 0. \quad (6.24)$$

Для стационарного изоэнергетического течения полная энтальпия сохраняется вдоль линий тока. В этом случае уравнение энергии не интегрируется, а используется аналитическая интегральная форма

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} = \text{const}. \quad (6.25)$$

Уравнения (6.22), (6.24) при постоянной полной энтальпии образуют в случае сверхзвукового течения гиперболическую систему. Ее можно решать маршевым методом по координате x , т. е. последовательно интегрируя уравнения вдоль направления x , начиная с поверхности задания начальных данных. Геометрия такой задачи показана на рис. 6.6. Начальные данные задаются на линии $x = 0$ и решение находится шаг за шагом при продвижении по координате x с учетом граничных условий на поверхности тела и соответствующих условий при y_{max} .

Уравнения (6.22) — (6.24) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0, \quad (6.26)$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ p + \rho v^2 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (6.26) можно решать любым методом, пригодным для гиперболических уравнений в частных производных из числа

представленных в гл. 4. Схема Мак-Кормака будет хорошим выбором. Вариант схемы Мак-Кормака с разностями вперед на шаге предиктор и с разностями назад на шаге корректор в применении к уравнению (6.26) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \overline{E}_j^{n+1} &= E_j^n - \frac{\Delta x}{\Delta y} (F_{j+1}^n - F_j^n), \\ E_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[E_j^n + \overline{E}_j^{n+1} - \frac{\Delta x}{\Delta y} (F_j^{n+1} - F_{j-1}^{n+1}) \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

По завершению шагов предиктор и корректор от вектора E следует перейти к примитивным переменным p, ρ, u, v . Только после

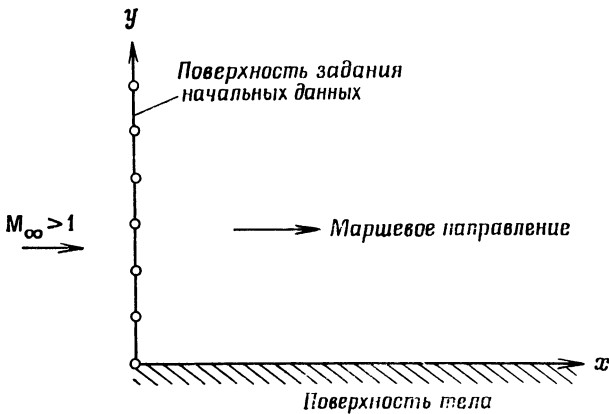


Рис. 6.6. Система координат для маршевой задачи.

этого можно составить новый вектор потока для следующего шага интегрирования. После получения решения на каждом шаге по маршевой координате сразу находим компоненту y скорости: $v = E_3/E_1$, где нижние индексы обозначают элементы вектора E . Для отыскания компоненты x скорости необходимо решить квадратное уравнение. Для исключения p можно скомбинировать E_2 с уравнением энергии; тогда имеем

$$\rho = \frac{E_2}{u^2 + [(\gamma - 1)/2\gamma](2H - u^2 - v^2)}.$$

Исключим ρ , используя равенство

$$\rho = E_1/u. \quad (6.28)$$

Это приводит к квадратному уравнению для u с корнями

$$u = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{E_2}{E_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{E_2}{E_1}\right)^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (2H - v^2)}. \quad (6.29)$$

Обычно радикал следует брать со знаком плюс. Плотность теперь рассчитывается через E_1 по формуле (6.28), а давление выражается через E_2 в виде

$$p = E_2 - \rho u^2. \quad (6.30)$$

Проделав эти вычисления, можно вычислить новое значение F и перейти к следующему шагу интегрирования.

Пример 6.2. Рассчитайте обтекание двумерного клина (полуугол при вершине равен 15°), движущегося со скоростью $M = 2$. Рассмотрите течение невязкого совершенного газа.

Решение. В задаче требуется определить положение скачка уплотнения и его интенсивность, а также картину течения вблизи клина. Кли́н и картина его обтекания показаны на рис. 6.7.

Обтекание двумерного клина с присоединенной ударной волной является коническим течением. Это значит, что параметры потока вдоль лучей, исходящих из вершины клина, постоянны [Anderson, 1982]. Это существенно облегчает задачу.

Определяющими уравнениями задачи являются уравнения (6.22) — (6.24) и уравнение энергии (6.25), граничными условиями — условие скольжения

на поверхности клина и условия в свободном потоке вне ударной волны. Конечно, можно направить ось x вдоль поверхности клина и интегрировать уравнения шаг за шагом вдоль этой оси до тех пор, пока число Маха в ударном слое остается больше единицы. К сожалению, по мере продвижения вниз по потоку ударный слой утолщается и в конце концов это приводит к взаимодействию внешней границы нашей расчетной области (при $y = y_{\max}$) с ударной волной.

Эти трудности можно легко преодолеть, если учесть, что ударная волна прямая, а толщина ударного слоя растет линейно с увеличением x . Выполним преобразование переменных

$$\xi = x, \quad \eta = y/x. \quad (6.31)$$

Оно приводит к расчетной сетке, изображенной на рис. 6.8. Теперь задача обтекания клина решается без особого труда, поскольку линии постоянства η растут линейно с x . Так как основ-

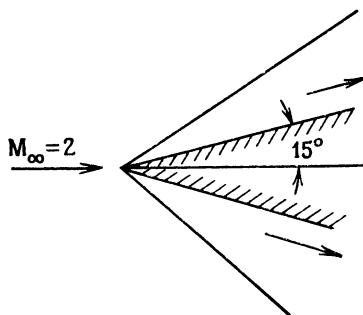


Рис. 6.7. Обтекание клина с присоединенной ударной волной.

ные уравнения являются гиперболическими относительно координаты ξ , то начальные данные необходимо задавать на некоторой линии, не являющейся характеристической. В качестве последней удобно выбрать линию $\xi = 1$. Уравнения в частных производных интегрируются в направлении ξ с произвольно заданными начальными условиями. Так как течение вокруг двумерного клина является коническим, то решение для него будет достигаться при больших ξ (асимптотически).

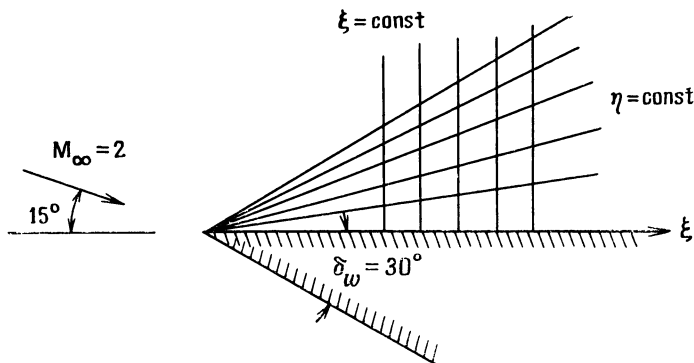


Рис. 6.8. Клин с ударным слоем после преобразования.

После преобразования координат от (x, y) к (ξ, η) уравнения принимают вид

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} = 0, \quad (6.32)$$

где $\bar{E} = \xi E$, $\bar{F} = F - \eta E$. Можно избежать дополнительных трудностей, если в этой задаче использовать свойства конического течения. Устойчивость схемы, применяемой для решения уравнений (6.32), зависит от собственных значений матрицы $[A]$ расширенной системы, записанной в координатах (ξ, η) :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi} + [A] \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta} + \mathbf{H} = 0. \quad (6.33)$$

В этом уравнении \mathbf{w} есть вектор примитивных переменных, а \mathbf{H} — источниковый член в расширенной системе. Оказывается, что собственные значения $[A]$ явно зависят от ξ , т. е. ξ входит в выражения для собственных значений. Когда при решении задачи мы продвигаемся вниз по потоку вдоль маршевой координаты ξ , допустимый размер шага должен изменяться, если применяется явная схема, например схема Мак-Кормака. Если при увеличении ξ этого не происходит, могут возникнуть трудности с устойчивостью разностной схемы. Их можно избежать,

если интегрировать уравнения от $\xi = 1$ до $\xi = 1 + \Delta\xi$ путем итераций до достижения сходимости.

Тщательного рассмотрения требуют граничные условия. Количество точек в направлении η должно быть достаточным, чтобы ударная волна могла формироваться естественным образом и не взаимодействовала с граничными условиями в свободном потоке, которые ставятся при $\eta = \eta_{\max}$. Например, если в нашей задаче ударная волна образует с поверхностью клина угол в 20° и в ударном слое мы размещаем 10 точек, то

$$\eta_{\text{shock}} = \text{tg}(20^\circ) = 0.3640, \quad \Delta\eta = 0.3640/(10 - 1) = 0.0404.$$

Пусть при том же шаге мы добавляем еще пять точек; тогда

$$\eta_{\max} = 0.0404(15 - 1) = 0.5662$$

и последняя точка сетки видится из вершины клина под углом 29.52° . Это должно гарантировать отсутствие интерференции ударной волны при граничных условиях, задаваемых на η_{\max} .

Если используется схема Мак-Кормака, то шаг предиктор можно делать непосредственно от стенки, так как используются разности вперед. Но шаг корректор должен быть модифицирован. Один из способов удовлетворения условию скольжения вдоль поверхности клина состоит в использовании на шаге корректор также передних разностей и последующей записи значения v на стенке с граничным условием $v = 0$. Несмотря на то что использование разностей вперед и в предикторе, и в корректоре приводит обычно к неустойчивостям схемы, граничное условие на стенке меняет ситуацию так, что устойчивость решения обеспечивается.

Типичные распределения давления при обтекании клина, полученные методом сквозного счета, изображены на рис. 6.9. Эти результаты отлично согласуются с аналитическим решением при $v = 1.0$, обнаруживая резко выраженную ударную волну, несколько размазанную осцилляциями. Однако результаты тех же расчетов при числе Куранта 0.7 выявляют дисперсионное поведение, присущее схемам второго порядка, которые обсуждались в гл. 4.

Прежде чем мы закончим с задачей обтекания клина, стоит заметить, что ее решение можно было бы получить, считая его зависящим от времени. Записанные в полярной системе координат уравнения, включая зависящие от времени члены, имеют вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial R} + H = 0, \quad (6.34)$$

при этом начало системы координат расположено в вершине клина, а векторы записаны в полярных координатах. Если априори предположить, что течение коническое, то можно получить решение в плоскости $R = \text{const}$, исключая из рассмотрения про-

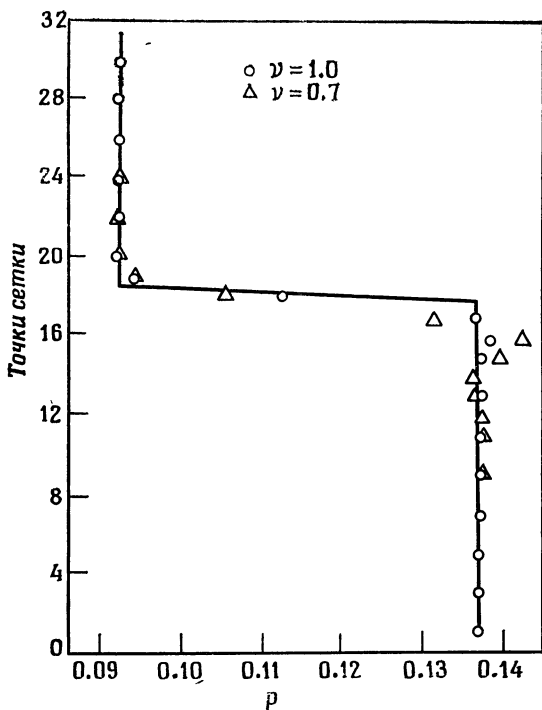


Рис. 6.9. Распределение давления при обтекании клина, полученное методом сквозного счета; $M_\infty = 2.0$, $\delta_w = 7.5^\circ$, p — безразмерное давление; ———— аналитическое решение.

изводные в радиальном направлении. В этом случае приходится решать систему

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} + \mathbf{H} = 0. \quad (6.35)$$

Система является гиперболической относительно времени, и ее можно решать, пока решение не установится по времени, что даст решение задачи стационарного обтекания клина. В некоторых отношениях зависящую от времени систему уравнений решать легче, например ее процедура расчета много проще.

Как и в примере 6.2, уравнения движения обычно преобразуются в вычислительной плоскости. Одно из наиболее часто

применяемых преобразований предложили Вивьян [Viviand, 1974] и Винокур [Vinokur, 1974]. Это преобразование (см. гл. 5) гарантирует, что система уравнений в строго дивергентной форме после замены независимых переменных может быть записана в прежнем виде. К его недостаткам можно отнести тот факт, что в преобразованных уравнениях в форме Вивьяна в знаменателе консервативных членов всегда возникает якобиан преобразования. Чтобы избежать ошибок при геометрических преобразованиях, необходимо принимать специальные меры при вычислении метрических коэффициентов. Это подробно будет обсуждаться в гл. 10.

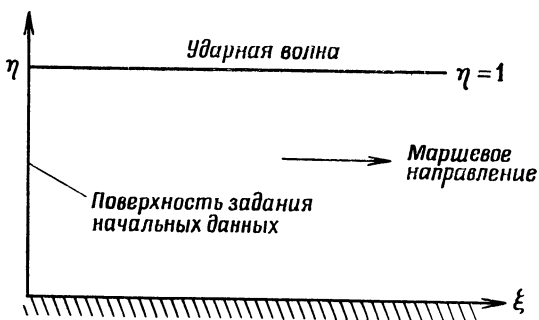


Рис. 6.10. Преобразованная область.

Сложностей, возникающих при использовании простой прямоугольной сетки в примере 6.2, можно было бы избежать, если бы ударная волна рассматривалась как разрыв. На самом деле в большинстве методов сквозного счета ударные волны на границах выделяются, а внутренние ударные волны улавливаются по мере их возникновения. В то время как одни и те же соображения лежат в основе методики выделения ударных волн как в стационарных задачах обтекания, решаемых маршевым методом, так и в задачах, зависящих от времени, несколько иная схема иногда применяется для расчета давления внутри области или за ударной волной, когда исходные уравнения записаны в дивергентной форме. Рассмотрим систему уравнений в частных производных, записанную в форме (6.26). Пусть мы используем преобразование

$$(x, y) \rightarrow (\xi, \eta), \quad \xi = x, \quad \eta = y/y_s(x), \quad (6.36)$$

где $y - y_s(x) = 0$ есть уравнение, задающее поверхность ударной волны. Как показано на рис. 6.10, физическая область преобразуется в вычислительную, в которой ударная волна расположена на поверхности $\eta = 1.0$. Дивергентная форма записи

уравнений может быть такой, какую предложил Вивьян, или любой другой формой, в которой имеет место сохранение соответствующих потоковых членов. Мы опять пользуемся маршевым методом для отыскания решения во внутренней части ударного слоя. На ударной волне для получения оценки одной из переменных следует применять одностороннее интегрирование. Будем считать, что в начальный момент времени нам известно все вдоль поверхности задания начальных данных, включая наклон ударной волны. Далее мы последовательно получаем решение во внутренней части ударного слоя, включая точки ударной волны, продвигаясь в направлении маршевой координаты. Кроме того, интегрируется уравнение для наклона ударной волны dy_s/dx , что дает уточненное положение ударной волны. Теперь мы вычисляем наклон ударной волны в ее новом положении, а также другие зависимые переменные, кроме давления.

Если давление за ударной волной известно, легко найти плотность и обе компоненты скорости из соотношений Гюгонио — Рэнкина. Требуется получить выражение для наклона ударной волны. Запишем уравнение поверхности ударной волны

$$y - y_s(x) = 0. \quad (6.37)$$

Тогда уравнение нормали к ней записывается в виде

$$\mathbf{n}_s = \frac{1}{[1 + (dy_s/dx)^2]^{1/2}} \left(-\mathbf{i} \frac{dy_s}{dx} + \mathbf{j} \right). \quad (6.38)$$

Нормальная компонента скорости перед ударной волной дается выражением

$$u_{\infty n} = \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{V}_{\infty} = \frac{1}{[1 + (dy_s/dx)^2]^{1/2}} \left(-u_{\infty} \frac{dy_s}{dx} + v_{\infty} \right). \quad (6.39)$$

Откуда для наклона ударной волны получаем

$$\begin{aligned} (u_{\infty n}^2 - u_{\infty}^2) \frac{dy_s}{dx} &= -u_{\infty} v_{\infty} \pm \\ &\pm \sqrt{u_{\infty}^2 v_{\infty}^2 - (u_{\infty n}^2 - u_{\infty}^2)(u_{\infty n}^2 - v_{\infty}^2)}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Величина $u_{\infty n}^2$ в (6.40) определяется по перепаду давления на ударной волне, задаваемому уравнением (5.209):

$$u_{\infty n}^2 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{p_2}{p_{\infty}} \right). \quad (6.41)$$

После того как наклон ударной волны рассчитан, в новом положении известны все величины. Эта процедура повторяется на шагах предиктор и корректор. Затем опять выделяем ударную волну, считая давление за ней (или какую-нибудь другую ве-

личину) известной. Этот подход предложил Томас и др. [Thomas et al., 1972].

Так как мы рассматриваем методы решения либо зависящих от времени уравнений, либо уравнений для стационарных сверхзвуковых течений невязкого газа, то эти уравнения относятся к типу гиперболических. Обычно гиперболические системы решаются явными методами. Однако величина шага для большинства явных схем ограничена условием Куранта — Фридрихса — Леви. Для некоторых задач это может привести к неразумно большим временам счета. Разработка и применение полностью неявных схем для решения гиперболических уравнений — сравнительно недавнее явление. Более ранние попытки такого рода были частично явными или итерационными. Недавно были разработаны неитеративные алгоритмы ([Lindemuth, Killeen, 1973; Briley, McDonald, 1973; Beam, Warming, 1976]). Преимущество неявных схем заключается в их безусловной устойчивости. Хотя по сравнению с явными методами приходится делать больше вычислений на один шаг по времени, полное время счета может оказаться меньшим. Мы опишем в общих чертах основную схему Бима — Уорминга [Beam, Warming, 1976] для уравнений, записанных в дивергентной форме, а затем рассмотрим алгоритм расщепления потоков, предложенный Стегером и Уормингом [Steger, Warming, 1979].

Рассматриваемая система аналогична уравнению (5.192). Для удобства приведем его здесь:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0, \quad (6.42)$$

где \mathbf{U} — вектор консервативных переменных, а \mathbf{E} и \mathbf{F} — вектор-функции от \mathbf{U} . Если схема интегрирования задается уравнением (4.58), то значение \mathbf{U} на следующем временном слое задается выражением

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^{n+1} \right],$$

или

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right)^n + \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right)^{n+1} \right]. \quad (6.43)$$

Последнее дает второй порядок аппроксимации вектора неизвестных \mathbf{U}^{n+1} на следующем временном слое. Эта схема неявная, поскольку производные \mathbf{U} да и сама величина \mathbf{U} берутся на следующем временном слое, связывая, таким образом, неизвестные в соседних узлах сетки на следующем временном слое. Для получения линейного уравнения, которое можно разрешить

относительно \mathbf{U}^{n+1} , используется локальное разложение в ряд Тейлора производных \mathbf{F} и \mathbf{G} . Пусть

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{n+1} &= \mathbf{E}^n + [\mathbf{A}](\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n), \\ \mathbf{F}^{n+1} &= \mathbf{F}^n + [\mathbf{B}](\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n),\end{aligned}\quad (6.44)$$

где $[\mathbf{A}] = \partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{U}$, $[\mathbf{B}] = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$.

После подстановки линеаризации (6.44) в (6.43) для определения \mathbf{U}^{n+1} имеем линейную систему относительно неизвестной \mathbf{U}^{n+1} :

$$\begin{aligned}& \left\{ [I] + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{A}]^n + \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{B}]^n \right) \right\} \mathbf{U}^{n+1} = \\ & = \left\{ [I] + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{A}]^n + \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{B}]^n \right) \right\} \mathbf{U}^n - \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right)^n.\end{aligned}\quad (6.45)$$

Прямого решения уравнения (6.45) стараются избежать из-за большого количества вычислений в случае многомерных задач. В этом случае предпочитают сводить многомерную задачу к последовательности одномерных. Это можно сделать, применяя метод дробных шагов [Yanenko, 1971] или метод приближенной факторизации [Peaceman, Rachford, 1955; Douglas, 1955].

Уравнение (6.45) можно записать в приближенно факторизованном виде

$$\begin{aligned}\left([I] + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{A}]^n \right) \left([I] + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{B}]^n \right) \mathbf{U}^{n+1} &= \left([I] + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{A}]^n \right) \times \\ &\times \left([I] + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{B}]^n \right) \mathbf{U}^n - \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right)^n.\end{aligned}\quad (6.46)$$

Это выражение отличается от исходного уравнения (6.45) на член порядка $(\Delta t)^2$, и формально точность нашего неявного алгоритма остается второго порядка. Эта факторизованная схема может быть представлена как последовательность схем по переменным (чередующимся) направлениям

$$\begin{aligned}\left([I] + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{A}]^n \right) \mathbf{U}' &= \text{Правая часть уравнения (6.46),} \\ \left([I] + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{B}]^n \right) \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}'.\end{aligned}\quad (6.47)$$

Если использовать дельта-форму, введенную в гл. 4, получается более простой алгоритм. Так как в обеих частях уравнения (6.46) стоят одинаковые операторы, то $\Delta \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$, отсюда

$$\begin{aligned}\left([I] + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{A}]^n \right) \left([I] + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{B}]^n \right) \Delta \mathbf{U}^n &= \\ &= -\Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right)^n.\end{aligned}\quad (6.48)$$

И опять это уравнение можно заменить последовательностью более простых уравнений по переменным направлениям

$$\begin{aligned} ([I] + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} [A]^n) \Delta \mathbf{U}' &= -\Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right)^n, \\ ([I] + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} [B]^n) \Delta \mathbf{U}'' &= \Delta \mathbf{U}'. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Решение этой системы нетривиально. Если пространственные производные аппроксимируются центральными разностями, то на каждом проходе по направлениям x и y требуется решать блочную трехдиагональную систему уравнений. Каждый блок имеет размер $m \times m$, где m — размерность неизвестной вектор-функции \mathbf{U} (см. приложение В).

Представленный здесь неявный алгоритм использует неявную центрированную по времени схему. Для построения семейства неявных алгоритмов различной точности можно использовать дискретизацию по времени общего вида [Warming, Beam, 1979]. Этот вопрос обсуждается в гл. 8. Там же приводятся дополнительные соображения о необходимости добавления искусственного демпфирования в связи с применением недиссипативных схем.

Стегер и Уорминг [Steger, Warming, 1979] разработали неявный алгоритм, в котором производится расщепление векторов \mathbf{E} и \mathbf{F} . Несмотря на то что точное расщепление может быть выполнено несколькими способами, обычно оно проводится в соответствии со знаками собственных значений системы, как это делается, например, в методе расщепления коэффициентов матриц (см. § 6.4). Чтобы показать идею расщепления, рассмотрим одномерную систему гиперболических уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0.$$

Эту систему можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + [A] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (6.50)$$

где $[A]$ есть матрица Якоби $\partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{U}$. Эта система гиперболическая, если существует преобразование подобия, такое, что

$$[T]^{-1} [A] [T] = [\lambda], \quad (6.51)$$

где $[\lambda]$ — диагональная матрица из собственных значений $[A]$, а $[T]^{-1}$ — матрица, строки которой есть левые собственные векторы матрицы $[A]$, взятые по порядку. Теперь векторы потоков

(\mathbf{E} и \mathbf{F} в уравнении (6.42)) обладают интересным свойством:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{A}] \mathbf{U}. \quad (6.52)$$

Это можно проверить простым перемножением указанных матриц. Согласно Стегеру и Уормингу, если уравнение состояния имеет форму

$$p = \rho f(e), \quad (6.53)$$

где e — внутренняя энергия, то вектор потока $\mathbf{E}(\mathbf{U})$ является однородной функцией \mathbf{U} первой степени, откуда следует

$$\mathbf{E}(\alpha \mathbf{U}) = \alpha \mathbf{E}(\mathbf{U}) \quad (6.54)$$

для любого α . Мы можем воспользоваться этим свойством, а также тем фактом, что система гиперболическая для представления потока в расщепленном виде.

Комбинируя (6.51) и (6.52), вектор \mathbf{E} можно записать в виде

$$\mathbf{E} = [\mathbf{A}] \mathbf{U} = [\mathbf{T}] [\lambda] [\mathbf{T}]^{-1} \mathbf{U}. \quad (6.55)$$

Матрица собственных значений разделяется на две; причем одна состоит только из положительных элементов, а другая — только из отрицательных. Запишем

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}]^+ + [\mathbf{A}]^- = [\mathbf{T}] [\lambda^+] [\mathbf{T}]^{-1} + [\mathbf{T}] [\lambda^-] [\mathbf{T}]^{-1} \quad (6.56)$$

и определим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-, \quad (6.57)$$

так что

$$\mathbf{E}^+ = [\mathbf{A}]^+ \mathbf{U}, \quad \mathbf{E}^- = [\mathbf{A}]^- \mathbf{U}. \quad (6.58)$$

Исходное уравнение в дивергентной форме записывается в обозначениях с расщепленными потоками в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}^+}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}^-}{\partial x} = 0, \quad (6.59)$$

знак плюс показывает, что должна быть использована разность назад, а знак минус — разность вперед.

Расщепление потоков можно применять как в явных, так и неявных алгоритмах. Например, схему второго порядка с разностями вверх по потоку можно записать [Warming, Beam, 1975] так:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j^{n+1} &= \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\nabla \mathbf{E}_j^+ + \Delta \mathbf{E}_j^-)^n, \\ \mathbf{U}_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\nabla^2 \mathbf{E}_j^{n+1} + \nabla \mathbf{E}_j^{n+1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Delta^2 \mathbf{E}_j^{n-1} - \Delta \mathbf{E}_j^{n-1}) \right]. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Нетрудно построить неявный центрированный по времени алгоритм с расщеплением потоков на основе

$$\left\{ [I] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\nabla [A_j]^+ + \Delta [A_j]^-) \right\} \Delta U_j^n = - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\nabla E^+ + \Delta E^-]^n. \quad (6.61)$$

Он имеет первый порядок точности по пространственной координате и второй по времени. Точность по пространственной координате можно улучшить простым увеличением порядка аппроксимации пространственных дифференциальных операторов. Зачастую интерес представляет только стационарное решение. В этом случае правая часть может быть модифицирована, чтобы получить второй порядок аппроксимации по пространству при выходе на стационарное решение без изменения блочной трехдиагональной структуры левой части.

Интересно отметить, что левую часть уравнения (6.61) можно приближенно представить в виде произведения двух операторов (факторизовать):

$$\begin{aligned} & \left([I] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \nabla [A_j]^+ \right) \left([I] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Delta [A_j]^- \right) \Delta U_j^n = \\ & = \text{Правая часть уравнения (6.61)}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Это позволяет реализовать алгоритм в виде следующей последовательности:

$$\begin{aligned} \left([I] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \nabla [A_j]^+ \right) \Delta U_j' &= \text{Правая часть уравнения (6.61)}, \\ \left([I] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Delta [A_j]^- \right) \Delta U_j^n &= \Delta U_j'. \end{aligned} \quad (6.63)$$

При использовании уравнений (6.63) каждый проход в одномерной задаче требует решения двух блочных двухдиагональных систем. Исходная система (6.61) требует решения одной блочной трехдиагональной системы на каждом шаге по времени. Важно отметить, что более экономичные вычисления, которые, как ожидается, имеют место при использовании уравнений (6.63), можно реализовать не для всех задач. Обычно главное преимущество, связанное с применением расщепленных форм с двухдиагональными системами, проявляется при решении многомерных задач.

Расщепление потоков в методах сквозного счета дает несколько более лучшие результаты, нежели обычные схемы с центральными разностями, но трудности все же остаются и здесь. При использовании расщепления потоков ударные волны хорошо прорабатываются, и результаты, получающиеся при этом, согласуются с теми, которые дают лучшие методы сквозного

счета. Результаты расчета с расщеплением потоков могут оказаться не так хороши, когда встречается звуковая линия. Небольшие осцилляции происходят при пересечении звуковой линии, потому что расщепление зависит от собственных значений. Поточковые члены имеют разрывы первых производных при изменении знака собственных значений. Стегер [Steger, 1981] получил хорошие результаты, когда переопределил собственные значения в виде

$$\lambda^{\pm} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + \varepsilon^2}}{2}, \quad (6.64)$$

где ε — коэффициент, введенный для обеспечения гладкости, когда λ меняет знак.

Наше обсуждение методов сквозного счета было сосредоточено на маршевых задачах как по времени, так и по пространству. Решение маршевых по времени задач может иметь своей целью или определение некоторого переходного процесса, или расчет установившегося течения как асимптотического по времени предела зависящей от времени задачи. В последнем случае временной предел может рассматриваться как релаксационный процесс по отношению к уравнениям Эйлера с включенной в них переменной времени, чтобы указать физическое направление релаксации. Истинные релаксационные процедуры не являются асимптотическими по времени, а основаны на релаксировании стационарных уравнений с целью получения решения для данного течения.

Релаксационные методы решения уравнений Эйлера рассматривались в работах [Steger, 1981; Johnson, 1980]. Стегер пользовался представлением уравнений Эйлера с расщепленными потоками и обычной релаксационной схемой для получения окончательного решения. Джонсон использовал новый подход, который он назвал *методом замещенных уравнений*. В его схеме записанные в дивергентной форме уравнения Эйлера встраиваются в систему более высокого порядка и решение уравнений Эйлера будет одним из частных случаев решения этой системы. Недостаток этого метода заключается в том, что приходится решать систему более высокого порядка, чем исходная система.

Сейчас обратимся к постановке граничных условий в методах сквозного счета. Отмечалось [Moretti, 1969], что корректная постановка граничных условий является делом непростым. Некорректные условия на твердой стенке могут привести к локально искаженным результатам, а во многих случаях даже разрушить решение. Гиперболические уравнения особенно чувствительны к граничным условиям. По причине их волновой природы ошибки в задании граничных условий распространяют-

ся по сетке с отражениями, и в результате может возникнуть неустойчивость.

Ранее мы разъяснили простую идею постановки граничных условий. Обсудим еще три процедуры постановки граничных условий: 1) отражение; 2) метод Аббетта (стационарные сверхзвуковые течения); 3) метод Кенцера.

Идея отражения является, по-видимому, старейшей схемой при постановке граничных условий на твердой поверхности для течений невязкой жидкости. Она не имеет четкого обоснования и является до некоторой степени лишь приближением. Запрещен поток массы по нормали через твердую границу.

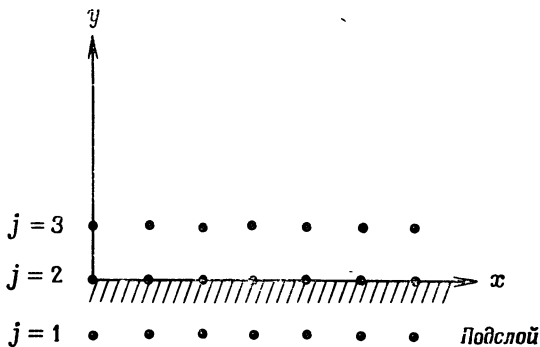


Рис. 6.11. Фиктивные точки в подслое $j = 1$, необходимые для постановки граничных условий типа отражения.

Для реализации граничного условия по методу отражения узлы сетки размещаются таким образом, что поверхность тела совпадает со вторым слоем, а первый слой узлов размещен внутри тела. Чтобы понять основную идею отражения, предположим, что мы решаем задачу о стационарном двумерном сверхзвуковом течении путем интегрирования уравнений движения. Как показано на рис. 6.11, ось x ($j = 2$) направлена вдоль поверхности тела, а первый слой сетки ($j = 1$) находится внутри тела. Если интегрирование уравнений Эйлера осуществляется по схеме второго порядка, например по схеме Мак-Кормака, то параметры потока на поверхности тела можно получить непосредственно из расчета. Значения примитивных переменных в узлах подповерхностного слоя задаются в соответствии с процедурой отражения. Мы полагаем, что давление, плотность и касательная скорость суть четные функции расстояния по нормали вверх от поверхности, а нормальная скорость есть нечетная функция этого аргумента. Тогда давление, плотность и касательная скорость в точке подповерхностного слоя сетки равны

соответствующим значениям в первой точке слоя сетки, следующего сразу за слоем, совпадающим с поверхностью тела. Вместе с тем нормальная скорость в точке подповерхностного слоя берется с обратным знаком по отношению к значениям нормальной скорости в соответствующей точке слоя $j = 3$.

Для стационарной двумерной маршевой задачи уравнение поверхности тела можно записать в виде

$$F(x, y) = y - f(x) = 0. \quad (6.65)$$

Тогда граничное условие для касательной к поверхности компоненты скорости в случае течения невязкой жидкости есть

$$v = u \, df/\partial x. \quad (6.66)$$

В общем случае условие отражения реализуется при помощи выражений для нормали к поверхности, для нормальной и касательной компонент скорости. Единичная нормаль к поверхности есть $\mathbf{n} = \nabla F/|\nabla F|$, тогда касательная к поверхности скорость есть

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{n} \times \mathbf{V} \times \mathbf{n}, \quad (6.67)$$

а нормальная —

$$\mathbf{u}_n = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (6.68)$$

Величины скоростей, определяемые уравнениями (6.67) и (6.68), переносятся в точки подслоя, чтобы соблюсти условие отражения. На практике только одна компонента касательной скорости используется как скалярная величина. Выражение для касательной скорости может стать громоздким, если используется полная касательная скорость. Обычно мы получаем систему уравнений, которые необходимо решать также и для точек подслоя в случае применения данной схемы (см. задачу 6.11). Хотя условие отражения сравнительно легко реализуется, регулярного применения оно не находит. Условие отражения очень неточно для тел с поверхностями большой кривизны.

Аббетт [Abbett, 1973] разработал процедуру задания граничных условий, в которой в максимально возможной степени используются физические соображения при формулировке граничных условий в плоскости, касательной к поверхности тела. Поскольку вычисляемый на последнем шаге процедуры интегрирования вектор скорости не параллелен поверхности тела, то основная идея метода Аббетта состоит в том, что вводится в рассмотрение течение типа простой волны, в котором газ либо сжимается, либо расширяется. При этом поток разворачивается и течет параллельно поверхности.

Рассмотрим стационарное сверхзвуковое течение совершенного газа. Пусть мы решаем стационарную маршевую задачу,

и пусть используется ортогональная система координат x_1, x_2, x_3 , в которой вектор скорости представляется в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}_1 u + \mathbf{i}_2 v + \mathbf{i}_3 \omega. \quad (6.69)$$

Компоненты скорости в соответствующих направлениях суть u, v, ω ; единичный вектор нормали к поверхности есть $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$,

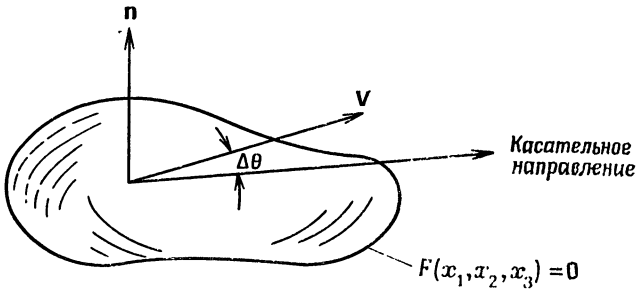


Рис. 6.12. Ориентация вектора скорости на поверхности тела.

где поверхность тела задается уравнением

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 - f(x_2, x_3) = 0. \quad (6.70)$$

Откуда получаем выражение для нормали к поверхности тела

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i}_1/h_1 - [(\mathbf{i}_2/h_2)(\partial f/\partial x_2)] - [(\mathbf{i}_3/h_3)(\partial f/\partial x_3)]}{\{1/h_1^2 + [(1/h_2)(\partial f/\partial x_2)]^2 + [(1/h_3)(\partial f/\partial x_3)]^2\}^{1/2}}. \quad (6.71)$$

Вектор скорости можно разложить на нормальную и касательную к поверхности компоненты. Если нормальная скорость рассчитывается в виде

$$\mathbf{u}_n = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (6.72)$$

то малое угловое расхождение $\Delta\theta$ между вектором скорости и плоскостью, касательной к поверхности, вычисляется по формуле

$$|\sin(\Delta\theta)| = |\mathbf{u}_n| / |\mathbf{V}|, \quad (6.73)$$

которую можно переписать в виде

$$\sin(\Delta\theta) = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) / |\mathbf{V}|. \quad (6.74)$$

Ориентация вектора скорости относительно поверхности тела показана на рис. 6.12, где изображен также угол $\Delta\theta$. Вектор скорости \mathbf{V} построен по значениям скорости на поверхности, рассчитанным в соответствии с принятой схемой интегрирования. Если в качестве последней используется схема Мак-Кормака,

то показанный на этом рисунке вектор \mathbf{V} строится по значениям, полученным на шаге корректор. Напомним, что на поверхности тела следует использовать на шаге корректор разность вперед.

Для разворота вектора скорости на угол $\Delta\theta$ так, чтобы он был параллелен поверхности, в поток вводится слабая волна. Если $\Delta\theta$ положительный, то необходимо, чтобы газ расширялся. Поскольку поток разворачивается на угол $\Delta\theta$, то должно измениться и давление. Для слабых волн давление связано с углом поворота потока следующим образом [см. NASA Report 1135 (Ames Research Staff, 1953)]:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\gamma M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \Delta\theta + \gamma M \left[\frac{(\gamma + 1) M^4 - 4(M^2 - 1)}{4(M^2 - 1)^2} \right] \Delta\theta^2 + \dots \quad (6.75)$$

В этом выражении M и p_1 — число Маха и давление до поворота потока, p_2 — давление после того, как поток повернулся. Определив давление из уравнения (6.75), можно вычислить изменение плотности. В этом месте схема Аббетта требует дополнительной информации. Полагают, что энтропия на поверхности известна. Величина p/ρ^γ известна по крайней мере вдоль линии тока, омывающей тело. Для расчета нового значения плотности ρ_2 используются новое значение давления p_2 и величина энтропии на поверхности.

Величина скорости в касательном направлении вычисляется из стационарного уравнения энергии. Если H — полная энтальпия, то скорость вдоль поверхности тела находится в виде

$$|\mathbf{V}_2| = \sqrt{2 \left(H - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \right)}. \quad (6.76)$$

Теперь могут быть определены компоненты скорости. Направление нового вектора скорости вдоль поверхности получаем вычитанием нормальной скорости из исходной (т. е. имевшей место до разворота потока) скорости, вычисляемой в процессе решения. В результате получаем выражение

$$\mathbf{V}_T = \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (6.77)$$

которое дает касательную компоненту исходной скорости. Полагают, что новый вектор скорости на поверхности имеет то же самое направление, а величина его равна

$$\mathbf{V}_2 = |\mathbf{V}_2| \mathbf{V}_T / |\mathbf{V}_T|. \quad (6.78)$$

Эта процедура расчета граничных условий сравнительно проста в применении и дает отличные результаты (см. Kutler et al., 1973). Одна из основных трудностей, правда, состоит в опреде-

лении надлежащего направления вектора скорости по завершении процедуры. В методе Аббетта полагают, что вектор скорости по завершению процедуры лежит в касательной к поверхности тела плоскости в направлении пересечения касательной плоскости и плоскости, образованной нормалью и исходным вектором скорости. Поправка на то, что это допущение некорректно, не производится.

Одна из трудностей постановки граничных условий в методах сквозного счета состоит в обеспечении условий скольжения вдоль поверхности, когда косая ударная волна падает на твердую границу. Гриффин [Griffin, 1981] получил хорошие результаты, заменяя значение энтропии в последующей точке на поверхности тела $(x + \Delta x, 0)$ его значением в предыдущей точке $(x, 0)$ плюс изменение энтропии между двумя предыдущими точками в слое над поверхностью тела $(x, \Delta y)$ и $(x - \Delta x, \Delta y)$. Для стационарных сверхзвуковых течений эта процедура дает оценку значения энтропии на поверхности. Согласно Гриффину, эта процедура работает очень хорошо при определении корректной величины энтропии на поверхности и дает способ определения граничных условий для областей пересечения ударных волн с твердыми поверхностями.

Кенцер [Kentzer, 1970] предложил схему формулировки граничных условий, которая существенно использует соотношения совместности на характеристиках, приходящих к границе из внутренней области, вместе с граничным условием на поверхности. Этот подход аналогичен используемому в неконсервативном методе расщепления матричных коэффициентов, который будет рассматриваться в следующем разделе. При этом подходе используется условие скольжения вдоль поверхности в дифференциальной форме с соответствующим уравнением совместности.

§ 6.4. Метод расщепления матричных коэффициентов

Метод расщепления матричных коэффициентов — сравнительно недавнее новшество в классе конечно-разностных методов для решения гиперболических уравнений в частных производных. Введенная Чакраварти [Chakravarthy, 1979; Chakravarthy et al., 1980] в практику исследований схема с расщепленными матричными коэффициентами является недивергентной формой схемы с расщепленными потоками, предложенной Стегером [Steger, 1978]. Метод расщепления матричных коэффициентов использует информацию о распространении сигнала, которую дает теория характеристик. Поэтому мы можем надеяться, что применение этого метода приведет к лучшим результатам по сравнению с теми, которые были получены прежними методами. Так

оно и оказывается. Рекомендуется применять метод расщепления матричных коэффициентов в тех случаях, когда численно решаются гиперболические уравнения в частных производных, записанные в недивергентной форме.

Получили также развитие и другие методы, в которых используется информация, приносимая на характеристиках. Гордон [Gordon, 1969] разработал во многом похожую схему для решения гиперболических систем. Моретти [Moretti, 1978]

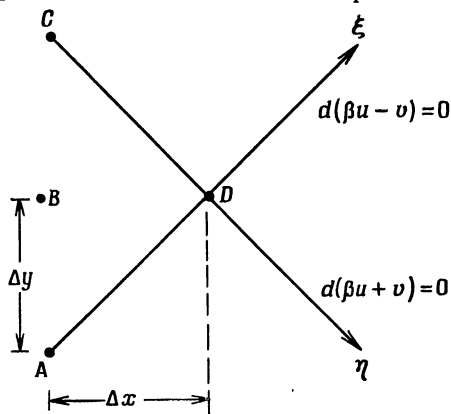


Рис. 6.13. Характеристики и расположение точек сетки.

предложил так называемую λ -схему, в которой обработка зависит от направления распространения сигнала. В некоторых случаях λ -схема Моретти и метод расщепления матричных коэффициентов идентичны. Однако в случае многомерных течений при использовании произвольной системы координат единая формулировка разностных уравнений по λ -схеме не существует. Метод расщепления матричных коэффициентов позволяет точно получать разностные уравнения в случае произвольного числа измерений.

Метод расщепления матричных коэффициентов легко разъяснить на примере системы двух линейных уравнений, рассмотренной в § 6.2. Система (6.3) была диагонализирована и соотношения совместности записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\beta u + v) - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} (\beta u + v) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\beta u - v) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} (\beta u - v) &= 0. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Как видно из рассмотрения рис. 6.13, эти уравнения эквивалентны требованию

$$d(\beta u - v) = 0 \quad (6.80a)$$

на характеристике $x - \beta y = \xi$ и требованию

$$d(\beta u + v) = 0 \quad (6.80b)$$

на $x + \beta y = \eta$.

Пусть мы хотим построить конечно-разностный аналог этих выражений. На положительной характеристике $\eta = \text{const}$ (рис. 6.13) мы можем записать

$$(\beta u - v)_D - (\beta u - v)_A = 0, \quad (6.81)$$

а на характеристике $\xi = \text{const}$ —

$$(\beta u + v)_D - (\beta u + v)_C = 0. \quad (6.82)$$

Эти уравнения можно решить относительно неизвестных в точке D , считая известными значения величин в точках A и C . Метод характеристик основан на интегрировании уравнений совместности (6.80a) и (6.80b) вдоль характеристик. Конечно-разностный метод характеристик можно построить, используя эквивалентное уравнение (6.79). Прибавим и вычтем величину $(\beta u - v)_B$ из уравнения (6.81). Это даст

$$\frac{(\beta u - v)_D - (\beta u - v)_B}{\Delta x} - \frac{(\beta u - v)_A - (\beta u - v)_B}{\beta \Delta y} = 0. \quad (6.83)$$

Аналогично уравнение (6.82) можно записать в виде

$$\frac{(\beta u + v)_D - (\beta u + v)_B}{\Delta x} - \frac{(\beta u + v)_C - (\beta u + v)_B}{\beta \Delta y} = 0. \quad (6.84)$$

Эти два соотношения являются конечно-разностными аналогами уравнений (6.79) и приводят к тому же решению в точке B . Схема с расщепленными матричными коэффициентами во многом основана на интегрировании соотношений совместности. Используемый в этом методе вид соотношений совместности получается, если переписать уравнение (6.79) в виде

$$\begin{bmatrix} \beta & -1 \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}_x + \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}_y^+ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \mathbf{w}_y^- = 0.$$

Оно может быть записано так:

$$\mathbf{w}_x + [A]^+ \mathbf{w}_y^+ + [A]^- \mathbf{w}_y^- = 0, \quad (6.85)$$

где

$$[A]^+ = \frac{1}{2\beta} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\beta} \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}, \quad [A]^- = \frac{1}{2\beta} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{\beta} \\ -\beta & -1 \end{bmatrix}. \quad (6.86)$$

Сравнивая с (6.14), видим, что

$$[A]^+ + [A]^- = [A]. \quad (6.87)$$

Смысл обозначения в (6.85) можно понять из уравнений характеристик. Матрица коэффициентов $[A]$ расщепляется, чтобы корректно учесть направления распространения сигнала при использовании односторонних разностей. Например, член $[A]^+ w_y^+$ означает вклад характеристики с положительным наклоном. В этом случае берется разность назад для производных от w , и об этом нам напоминает знак собственного значения. Если для аппроксимации производных по y используются простые односторонние разности, уравнение (6.85) в форме с расщепленной матрицей коэффициентов аналогично конечно-разностному методу характеристик. Если же используются односторонние разности более сложного вида, то эти методы уже не идентичны, хотя расщепление все же содержит информацию о распространении сигнала.

Пример 6.3. Решить задачу из примера 6.1 методом расщепления матричных коэффициентов.

Решение. Соответствующие конечно-разностные уравнения получаются, если записать два скалярных уравнения (6.85) в виде

$$\begin{aligned} u_x + 1/2(u_y - v_y)^+ - 1/2(u_y + v_y)^- &= 0, \\ v_x + 1/2(-u_y + v_y)^+ - 1/2(u_y + v_y)^- &= 0. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Теперь для производных по x используем разности вперед, а члены плюс и минус аппроксимируем разностями первого порядка. Тогда первое из разностных уравнений можно записать как

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta x}{2\Delta y} (u_j^n - u_{j-1}^n - v_j^n + v_{j-1}^n) + \\ &+ \frac{\Delta x}{2\Delta y} (u_{j+1}^n - u_j^n + v_{j+1}^n - v_j^n). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем второе выражение. Граничные условия известны, и мы можем интегрировать конечно-разностные уравнения в маршевом направлении x , начиная с поверхности задания начальных условий. Мы построили схему первого порядка с расщепленными матричными коэффициентами для решения задачи из нашего примера. Результаты ее численного решения прекрасно согласуются с точным решением (см. задачу 6.6).

Устойчивость явных схем с расщепленными матричными коэффициентами определяется обычным условием Куранта —

Фридрихса — Леви. Другие пределы устойчивости получаем при использовании односторонних разностей более высокого порядка. Это будет предметом более подробного обсуждения в данном параграфе.

Мы описали метод характеристик и метод расщепления матричных коэффициентов для простой линейной задачи. На ее примере мы продемонстрировали основные идеи, на которых основаны эти схемы. Оба этих метода пригодны и для нелинейных уравнений динамики жидкости, пока последние остаются гиперболическими. Сейчас рассмотрим теорию этого метода для системы нелинейных уравнений гиперболического типа.

Уравнения нестационарного одномерного течения невязкого совершенного газа имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + [A] \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0, \quad (6.89)$$

где \mathbf{w} есть n -компонентный вектор неизвестных и $[A]$ — матрица размером $n \times n$. Собственные значения $[A]$ определяют характеристические направления, и можно записать

$$dx/dt = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.90)$$

Для каждого собственного значения λ_i существует левый собственный вектор \mathbf{L}_i , удовлетворяющий условию

$$\mathbf{L}_i^T ([A] - \lambda_i [I]) = 0. \quad (6.91)$$

Как и в примере с линейной задачей, уравнение совместности получаем умножением транспонированного вектора \mathbf{L}_i на исходную систему (6.89):

$$\mathbf{L}_i^T (\mathbf{w}_t + [A] \mathbf{w}_x) = \mathbf{L}_i^T (\mathbf{w}_t + \lambda_i \mathbf{w}_x) = 0. \quad (6.92)$$

Это приводит к уравнениям вдоль характеристик, и собственно с этого момента начинается построение схемы с расщепленными матричными коэффициентами. Пусть $[T]^{-1}$ есть матрица, n строк которой являются n левыми собственными векторами, взятыми по порядку. Тогда уравнение совместности можно записать в виде

$$[T]^{-1} \mathbf{w}_t + [\Lambda_A] [T]^{-1} \mathbf{w}_x = 0, \quad (6.93)$$

где $[\Lambda_A]$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы $[A]$. После умножения (6.93) на $[T]$ слева получаем

$$\mathbf{w}_t + [T] [\Lambda_A] [T]^{-1} \mathbf{w}_x = 0. \quad (6.94)$$

Исходную матрицу $[A]$ можно теперь записать как

$$[A] = [T] [\Lambda_A] [T]^{-1}. \quad (6.95)$$

Если $[\Lambda_A]$ расщепить на положительную и отрицательную части:

$$[\Lambda_A] = [\Lambda_A]^+ + [\Lambda_A]^- \quad (6.96)$$

и подставить в уравнение (6.95), то получим

$$[A] = [T][\Lambda_A]^+ [T]^{-1} + [T][\Lambda_A]^- [T]^{-1}, \quad (6.97)$$

где $[A] = [A]^+ + [A]^-$. Матрицы $[A]^+$ и $[A]^-$ отождествляются с собственными значениями и собственными векторами. Мы опять можем записать наше уравнение в виде

$$\mathbf{w}_t + [A]^+ \mathbf{w}_x + [A]^- \mathbf{w}_x = 0, \quad (6.98)$$

где смысл обозначений « \pm » такой же, как и в предыдущем примере.

Пример 6.4. Пусть мы собираемся получить расщепленную форму записи стационарных двумерных уравнений Эйлера. Ее можно использовать для расчета стационарного сверхзвукового обтекания любой двумерной поверхности. Уравнения в этом случае имеют окончательный вид

$$\mathbf{w}_x + [T][\Lambda]^+ [T]^{-1} \mathbf{w}_y + [T][\Lambda]^- [T]^{-1} \mathbf{w}_y = 0.$$

Мы уже получили вид матрицы $[T]^{-1}$ [см. выражение (6.19b)]. Остается только вычислить ее элементы. Эти алгебраические вычисления довольно просты. В задачах такого типа эти вычисления приходится проделывать на каждом шаге для определения λ^+ и λ^- и, следовательно, для правильного дифференцирования по пространственным координатам. Остальные подробности этого примера даны в качестве упражнения в задаче 6.7 настоящей главы.

Была предложена альтернативная форма записи [Moretti, 1971; Salas, 1975; Magsoni, 1980] основных уравнений динамики жидкости. В ней производные плотности в уравнении неразрывности заменены на производные давления по известному выражению для скорости звука. Кроме того, вместо уравнения энергии используется уравнение для энтропии. В такой форме уравнения из п. 5.5.4 выглядят так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a^2}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a^2}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (6.99)$$

В этой системе неизвестными величинами являются компоненты скорости u и v , энтропия s и натуральный логарифм давления P . Интересно заметить, что уравнение для энтропии не связано с остальными уравнениями системы. Следовательно, энтропию можно рассчитывать независимым образом. Моретти [Moretti, 1971] указал, что для аппроксимации энтропии всегда следует использовать разности вверх по потоку, поскольку уравнение для энтропии выражает всего лишь тот факт, что эта функция постоянна вдоль линии тока. Это требует, чтобы разностная аппроксимация производной ds/du была вперед или назад в зависимости от знака v/u . Это согласуется с методом расщепления матричных коэффициентов. Даже в схеме Мак-Кормака рекомендуется для энтропии использовать разности вверх по потоку.

Особое внимание следует уделить должной аппроксимации членов с производными в методе расщепления матричных коэффициентов. Чтобы охватить в нашем рассмотрении большее число идей общего характера, вновь обратимся к нелинейному уравнению (6.98). Если обозначить разность первого порядка назад через ∇ , а разность первого порядка вперед через Δ , то схема первого порядка по времени и по пространству будет задаваться выражением

$$\mathbf{w}_j^{n+1} = \mathbf{w}_j^n - ([A]^+ \nabla \mathbf{w}_j^n + [A]^- \Delta \mathbf{w}_j^n) \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Разработка схем второго порядка требует большей тщательности. Моретти [Moretti, 1978] предложил схему с переключением с двухточечных разностей на трехточечные на последовательности предиктор-корректор.

Шаг предиктор

$$\overline{\mathbf{w}}_j^{n+1} = \mathbf{w}_j^n - \Delta t ([A]^+ \mathbf{w}_x^- + [A]^- \mathbf{w}_x^+),$$

на котором производные по пространственной координате аппроксимируются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_x^- &= \frac{2\mathbf{w}_j^n - 3\mathbf{w}_{j-1}^n + \mathbf{w}_{j-2}^n}{\Delta x}, \\ \mathbf{w}_x^+ &= \frac{\mathbf{w}_{j+1}^n - \mathbf{w}_j^n}{\Delta x}. \end{aligned} \tag{6.100}$$

Шаг корректор

$$\mathbf{w}_j^{n+1} = \mathbf{w}_j^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{w}_i^n + \overline{\mathbf{w}}_i^{n+1}),$$

на котором пространственное дифференцирование как в \mathbf{w}_t^n , так и в $\overline{\mathbf{w}_t^{n+1}}$ производится по двухточечному назад и трехточечному вперед выражениям

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_x^- &= \frac{\mathbf{w}_j^n - \mathbf{w}_{j-1}^n}{\Delta x}, \\ \mathbf{w}_x^+ &= \frac{-2\mathbf{w}_j^n + 3\mathbf{w}_{j+1}^n - \mathbf{w}_{j+2}^n}{\Delta x},\end{aligned}\quad (6.101)$$

причем пространственные производные в $\overline{\mathbf{w}_t^{n+1}}$ аппроксимируются с использованием значений, полученных на шаге предиктор. Чтобы обеспечить требуемый второй порядок точности, разностная аппроксимация на каждом шаге меняется. Важно отметить, что точные явные схемы второго порядка с односторонними разностями не так компактны, как схемы с центральными разностями. Для уравнения (6.98) требуется задействовать три точки для схем первого порядка и пять точек для схем второго порядка. С другой стороны, схема Мак-Кормака формально дает второй порядок аппроксимации по пространству и использует только три точки.

Недостаток схемы, описываемой уравнениями (6.100) и (6.101), заключается в том, что она не удовлетворяет точно условию сдвига. Это значит, что при числе Куранта, равном единице, она в точности не следует характеристикам линейной задачи. Габутти [Gabutti, 1982] для устранения этого недостатка ввел поправку. Предложенная им схема является трехшаговой. Для уравнений (6.99) имеем

Шаг предиктор

$$\overline{\mathbf{w}_j^{n+1}} = \mathbf{w}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ([A]^+ \nabla \mathbf{w}_j^n + [A]^- \Delta \mathbf{w}_j^n). \quad (6.102)$$

Промежуточный шаг

$$\mathbf{w}'_t = [A]^- \left(\frac{2\mathbf{w}_j^n - 3\mathbf{w}_{j+1}^n + \mathbf{w}_{j+2}^n}{\Delta x} \right) - [A]^+ \left(\frac{2\mathbf{w}_j^n - 3\mathbf{w}_{j-1}^n + \mathbf{w}_{j-2}^n}{\Delta x} \right). \quad (6.103)$$

Шаг корректор

$$\mathbf{w}_j^{n+1} = \mathbf{w}_j^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{w}'_t + \overline{\mathbf{w}_t^{n+1}}). \quad (6.104)$$

Здесь $\overline{\mathbf{w}_t^{n+1}}$ вычисляется обычным способом по исходному уравнению с использованием передних и задних разностей первого порядка. Интересно заметить, что эта схема полностью совпадает с предложенной Уормингом и Бимом [Warming, Beam,

1975] (см. п. 4.1.9) и использованной Стегером и Уормингом [Steger, Warming, 1979]. Схема Бима — Уорминга второго порядка на шаге предиктор совпадает с уравнением (6.102), а шаг корректор задается как

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j^{n+1} = & \mathbf{w}_j^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{w}_t^n + \overline{\mathbf{w}_t^{n+1}}) + \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [A]^- \Delta^2 \mathbf{w}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [A]^+ \nabla^2 \mathbf{w}_j^n. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Введенные на шаге корректор два дополнительных члена изменяют ошибку аппроксимации так, что схема дает второй порядок точности, удовлетворяя при этом условию сдвига.

Процедуры постановки граничных условий в методах, подобных методу расщепления матричных коэффициентов, имеют разумное обоснование. На границах вычислительной области некоторые характеристики приходят к границе из внутренней части, другие — извне. Мы можем воспользоваться уравнениями совместности вдоль характеристик, приходящих к границе из внутренней части области. Однако информацию, приносимую остальными характеристиками, использовать невозможно. Соответствующие соотношения совместности должны быть заменены заданными граничными условиями. Это могут быть либо условие скольжения потока вдоль твердой границы, либо заданные распределения давления или скорости на внешней границе. При рассмотрении сверхзвуковых течений с ударными волнами ударные волны следует трактовать как разрывы. Это будет обсуждаться позже в данной главе.

Пример 6.5. Пусть требуется рассчитать распределение давления в одномерном сопле, когда первоначально покоящийся газ разгоняется до скорости звука в горловом сечении, а затем расширяется в сверхзвуковой части сопла при заданном давлении на срезе сопла. Схематически сопло изображено на рис. 6.14.

Решение. Одномерное течение газа описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (6.106)$$

где $\alpha = (1/A) \partial A / \partial x$. Так как мы пользуемся недивергентной формой записи уравнений, то правильно «поймать» скачок внутри сопла нельзя. При интегрировании уравнений (6.106) необходимо иметь уравнение для энтропии или считать поток изэнтропическим ($s = \text{const}$). В нашем примере для простоты будем

считать энтропию постоянной. Даже в рамках этого предположения единственное решение для течения в сопле получаем интегрированием уравнений по времени.

Соответствующая форма уравнений с расщепленными матричными коэффициентами без труда получается из уравнений (6.106), и ее вывод здесь мы приводить не будем. Сосредоточим

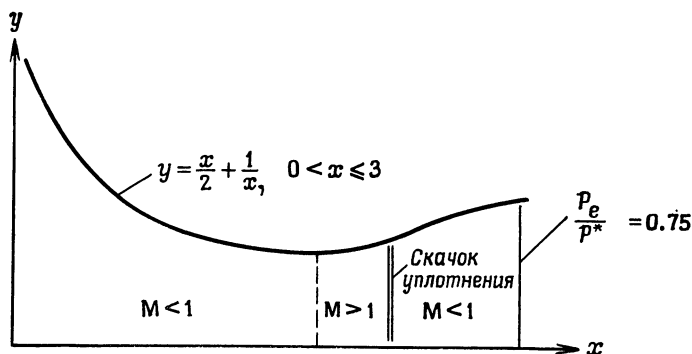


Рис. 6.14. Одномерное течение в сопле.

наше внимание на постановке граничных условий на срезе сопла. На рис. 6.15 показан срез сопла и приходящие на него характеристики в плоскости (x, t) . Поскольку характеристики, имеющие

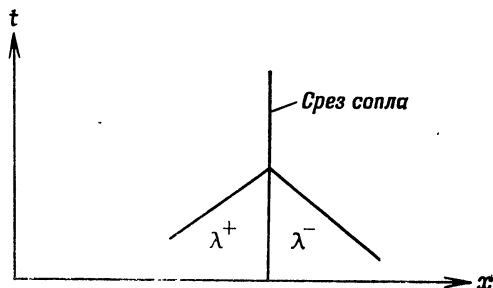


Рис. 6.15. Характеристики в плоскости среза.

отрицательный наклон, приходят извне, то соотношение совместности на них следует заменить граничным условием. В нашем примере это $p = 0.75p^*$, где p^* — давление заторможенного потока. Уравнение совместности вдоль характеристики с положительным наклоном дает полезную информацию, которой мы и воспользуемся. Оно записывается в виде

$$a \frac{\partial P}{\partial t} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda^+ \left(a \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \gamma a u = 0. \quad (6.107)$$

Для заданного давления на срезе сопла требуем, чтобы $\partial P/\partial t = 0$. Когда производные по x в уравнении (6.107) аппроксимируются разностями назад, новое значение скорости на срезе сопла получается сразу интегрированием. Оно вместе с заданным на срезе сопла давлением полностью определяет задание граничных условий на срезе сопла.

Метод расщепления матричных коэффициентов применим в случае любого числа измерений, и в этом плане поучительным является пример двумерного зависящего от времени течения. Обычно выполняется преобразование координат

$$\tau = t, \quad \xi = \xi(t, x, y), \quad \eta = \eta(t, x, y). \quad (6.108)$$

Если в декартовой системе координат переменными являются s, u, v и P , то в преобразованных координатах уравнения запишутся в виде

$$\mathbf{w}_\tau + [A] \mathbf{w}_\xi + [B] \mathbf{w}_\eta + \mathbf{h} = 0. \quad (6.109)$$

В соответствии с принятыми ранее обозначениями мы можем расщепить матрицы $[A]$ и $[B]$; тогда получим

$$\mathbf{w}_\tau + [T][\Lambda_A][T]^{-1} \mathbf{w}_\xi + [S][\Lambda_B][S]^{-1} \mathbf{w}_\eta + \mathbf{h} = 0. \quad (6.110)$$

В этом выражении $[\Lambda_A]$ и $[\Lambda_B]$ — диагональные матрицы, состоящие из собственных значений матриц $[A]$ и $[B]$, а $[T]^{-1}$ и $[S]^{-1}$ — транспонированные матрицы, составленные из соответствующих собственных векторов. В уравнении (6.110)

$$\mathbf{w} = (s, u, v, P)^T, \quad (6.111)$$

$$\mathbf{h} = (0, 0, 0, \varepsilon \gamma \frac{v}{y})^T, \quad (6.112)$$

где $\varepsilon = (1, 0)$ для осесимметричного или двумерного течения соответственно,

$$[A] = \begin{bmatrix} \bar{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & \xi_x \frac{a^2}{\gamma} \\ 0 & 0 & \bar{u} & \xi_y \frac{a^2}{\gamma} \\ 0 & \gamma \xi_x & \gamma \xi_y & \bar{u} \end{bmatrix}, \quad (6.113)$$

$$\bar{u} = \xi_t + u \xi_x + v \xi_y,$$

$$[\Lambda_A] \text{ — диагональная матрица с элементами } \bar{u}, \bar{u} \text{ и } \bar{u} + a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \bar{u} - a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \quad (6.114)$$

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & \frac{k_1}{2} & \frac{k_2}{2} & \frac{a}{2\gamma} \\ 0 & \frac{k_1}{2} & \frac{k_2}{2} & -\frac{a}{2\gamma} \end{bmatrix}, \quad (6.115)$$

$$k_1 = \frac{\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}, \quad k_2 = \frac{\xi_y}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}.$$

Матрицы $[\Lambda_B]$, $[S]^{-1}$ и $[S]$, соответствующие матрице $[B]$, выглядят аналогично с заменой ξ на η в элементах $[A]$. Пусть

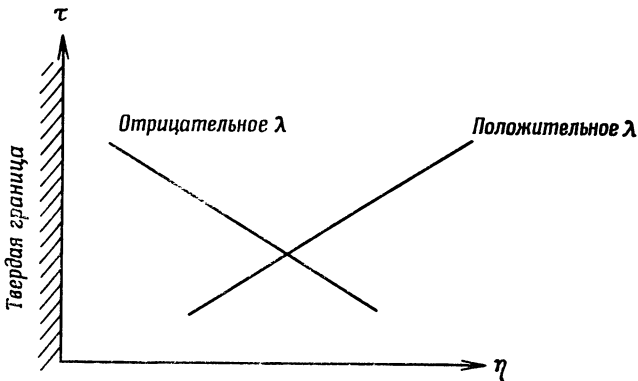


Рис. 6.16. Вычислительная плоскость (τ, η) .

при $\eta = 0$ имеется твердая стенка. Так как мы интегрируем уравнения по времени, будем исследовать характеристические направления в плоскости (τ, η) , чтобы найти те, на которых можно пользоваться соотношением совместности, и те, которые должны быть заменены граничными условиями. На рис. 6.16 изображена плоскость τ, η . Поскольку события развиваются в сторону увеличения времени, границы достигает информация, которая переносится только вдоль характеристики с отрицательным наклоном (правая характеристика). Информация, переносимая левой характеристикой, должна быть заменена граничными условиями на стенке. Третье уравнение совместности, соответствующее третьему собственному значению матрицы (6.114), в которой \bar{u} заменено на \bar{v} , а ξ — на η , не может быть использовано. Граничное условие в этом случае такое:

$$\bar{v} = \eta_t + u\eta_x + v\eta_y = 0. \quad (6.116)$$

Продифференцируем это выражение по времени; тогда получим

$$\eta_x u_\tau + \eta_y v_\tau = 0. \quad (6.117)$$

Чтобы получить решение на границе, это выражение используется совместно с тремя остальными уравнениями совместности. Основную систему уравнений можно преобразовать. Если положить

$$\mathbf{g} = [T][\Lambda_A][T]^{-1} \mathbf{w}_\xi + \mathbf{h}, \quad (6.118)$$

то уравнение (6.110) можно переписать в виде

$$\mathbf{w}_\tau + [S][\Lambda_B][S]^{-1} \mathbf{w}_\eta + \mathbf{g} = 0. \quad (6.119)$$

Уравнения совместности в плоскости (τ, η) суть

$$[S]^{-1} \mathbf{w}_\tau + [\Lambda_B][S]^{-1} \mathbf{w}_\eta + [S]^{-1} \mathbf{g} = 0. \quad (6.120)$$

Третье уравнение совместности заменяется дискретизированным условием скольжения вдоль поверхности [уравнение (6.117)], что приводит к системе вида

$$[D] \mathbf{w}_\tau + \mathbf{e} + \mathbf{f} = 0, \quad (6.121)$$

где

$$[D] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ 0 & \eta_x & \eta_y & 0 \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \sum_{i=1}^4 s_{1i} \omega_{i\eta}^+ \\ \lambda_2 \sum_{i=1}^4 s_{2i} \omega_{i\eta}^+ \\ 0 \\ \lambda_4 \sum_{i=1}^4 s_{4i} \omega_{i\eta}^+ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 s_{1i} g_i \\ \sum_{i=1}^4 s_{2i} g_i \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 s_{4i} g_i \end{bmatrix}.$$

Здесь s_{ij} — элементы матрицы $[S]^{-1}$. Теперь можно получить явные выражения для элементов \mathbf{w}_ξ из уравнения (6.121).

Поскольку мы обсуждаем постановку граничных условий для уравнений Эйлера, записанных в недивергентной форме, удобно рассмотреть вопрос о выделении скачка. Обычно мы выделяем скачок как некоторую границу, и расчет положения скачка является частью всего решения. На показанной на рис. 6.16 вычислительной плоскости скачок будет формироваться

при $\eta = \eta_{\max}$. Выделение скачка — вопрос удовлетворения соотношениям Гюгио — Рэнкина при одновременном соблюдении того, чтобы решение за скачком было совместимо с остальным полем течения.

Решение за ударной волной определяется параметрами свободного потока, скоростью ударной волны и ее ориентацией. Если мы знаем параметры свободного потока, первоначальный наклон ударной волны и скорость, то в схеме выделения скачка неизвестными величинами в первую очередь можно считать скорость ударной волны или перепад давления на ней. Чтобы получить выражение для ускорения ударной волны или давления за ней, применяется обычная процедура объединения соотношений Гюгио — Рэнкина с одним из уравнений совместности. Например, если мы нашли давление за скачком, то можно вычислить другие параметры течения за скачком при помощи соотношений

$$\mathbf{V}_\infty = iu_\infty + jv_\infty, \quad \mathbf{n}_s = \frac{i\eta_x + j\eta_y}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}}, \quad u_{\infty n} = |\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_s|,$$

$$M_s = \left\{ \frac{1}{2\gamma} \left[\frac{p_2}{p_\infty} (\gamma + 1) + (\gamma - 1) \right] \right\}^{1/2}, \quad (6.122)$$

$$V_s = a_\infty M_s - u_{\infty n}, \quad u_{2n} - u_{\infty n} = \frac{2a_\infty (1 - M_\infty^2)}{(\gamma + 1) M_s},$$

$$\rho_2 = \rho_\infty \left(\frac{p_2}{p_\infty} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \left[\frac{1}{1 + (\gamma - 1) (p_2/p_\infty)/(\gamma + 1)} \right],$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_\infty + (u_{2n} - u_{\infty n}) \mathbf{n}_s [\text{sign}(\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_s)].$$

Нижний индекс ∞ относится к условиям свободного потока, индекс 2 — к параметрам потока сразу за скачком; индекс s указывает на принадлежность к поверхности скачка, n обозначает нормаль к этой поверхности. Уравнение (6.122) легко получить из соотношения Гюгио — Рэнкина и выражения для относительной скорости ударной волны. Подробности этого вывода опускаем, так как они аналогичны тем, которые были приведены в предыдущем параграфе, когда схема выделения скачка применялась для маршевой по пространству задачи. На рис. 6.17 показаны обозначения и ориентация ударной волны в физическом пространстве. В соответствии с уже обсуждавшейся процедурой постановки граничных условий информацию на ударную волну из внутренней области приносит только одна характеристика. Пусть это будет характеристика λ_4 , а соответствующее уравнение совместности имеет вид

$$\sum_{i=1}^4 s_{4i} (\omega_{i\tau} + \lambda_4 \omega_{i\eta} + g_i) = 0. \quad (6.123)$$

Поскольку ударная волна является одной из границ нашей области, можно записать

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} = \frac{\partial \omega_i}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tau}. \quad (6.124)$$

Иными словами, мы явным образом включили зависимость переменных ω_i от давления. Производные $\partial \omega_i / \partial p$ можно найти из

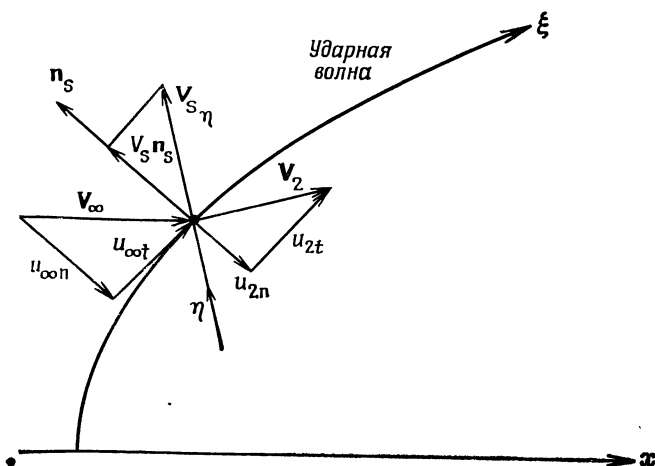


Рис. 6.17. Геометрия ударной волны.

уравнения (6.122). Если подставить уравнение (6.124) в (6.123), то получим зависимость для изменения давления во времени

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} \sum_{i=1}^4 s_{4i} \frac{\partial \omega_i}{\partial p} = - \sum_{i=1}^4 s_{4i} (\lambda_4 \omega_{i\eta} + g_i). \quad (6.125)$$

Производные $\omega_{i\eta}$ аппроксимируются разностями назад, что вполне согласуется с тем, что информация приносится вдоль положительной характеристики. Уравнение (6.125) позволяет вычислить p_τ , после чего производные по времени от других переменных можно выразить из уравнения (6.124). Далее эти выражения интегрируются, в результате получают новые значения зависимых переменных. Положение ударной волны уточняется путем интегрирования известной скорости ударной волны. Моретти [Moretti, 1974; 1975] предпочитает принимать в качестве зависимой переменной скорость ударной волны V_s . Такой подход легко можно рассмотреть в рамках настоящего анализа. Прежняя зависимость для переменных ω_i , задаваемая

уравнением (6.124), заменяется соотношением

$$\frac{\partial w_i}{\partial \tau} = \frac{\partial w_i}{\partial V_s} \frac{\partial V_s}{\partial \tau}, \quad (6.126)$$

где $\partial w_i / \partial V_s$ мы опять вычисляем из соотношений Гюгонио — Рэнкина. Подстановка этих выражений в уравнение совместно-

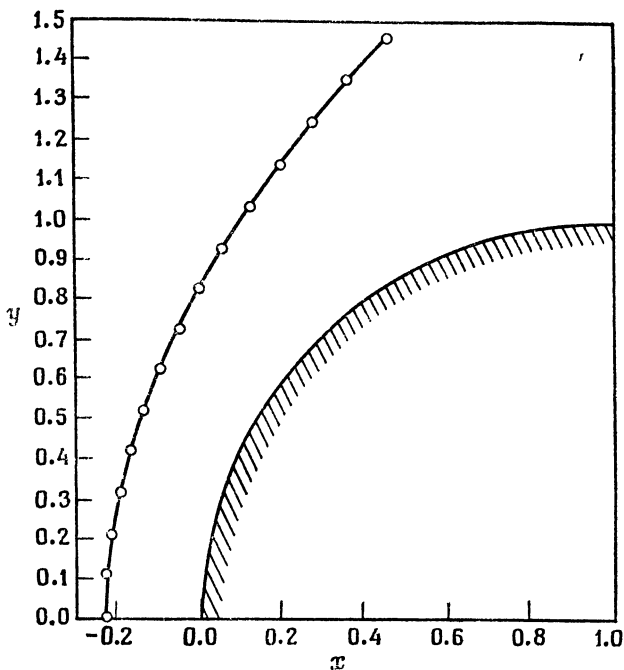


Рис. 6.18. Сфера в сверхзвуковом потоке с $M_\infty = 2.94$; — [Salas, 1979]; \circ метод расщепления матричных коэффициентов [Chakravarthy et al., 1980].

сти дает уравнение, решая которое, можно определить ускорение ударной волны

$$\frac{\partial V_s}{\partial \tau} \sum_{i=1}^4 s_{4i} \frac{\partial w_i}{\partial V_s} = - \sum_{i=1}^4 s_{4i} (\lambda_4 w_{i\eta} + g_i). \quad (6.127)$$

Зная ускорение ударной волны, скорость и положение ее находят интегрированием по времени. Новые значения зависимых переменных вычисляют из соотношений Гюгонио — Рэнкина по новым значениям скорости ударной волны.

Де Ниф и Моретти [De Neef, Moretti, 1980] предложили другой подход к выделению скачка, который назвали *методом с последующей коррекцией*. В этом методе ударная волна рассмат-

ривается как граница в течении и уравнения движения интегрируются за ударной волной при помощи соответствующих разностей. Это дает набор значений зависимых переменных, полученных интегрированием уравнений Эйлера, приносящих информацию изнутри области. После чего по соотношениям Гюгоню —

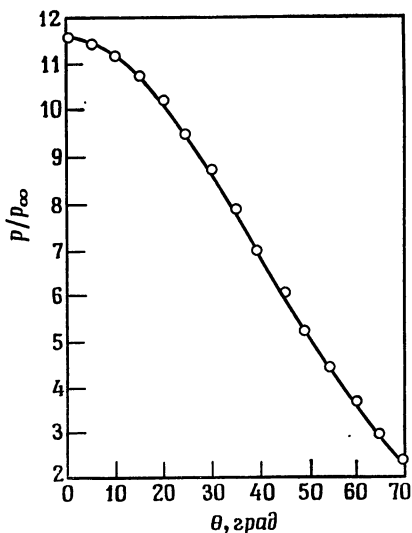


Рис. 6.19. Распределение давления на сфере при $M_\infty = 2.94$; — [Salas, 1979], \circ метод расщепления матричных коэффициентов [Chakravarthy et al., 1980].

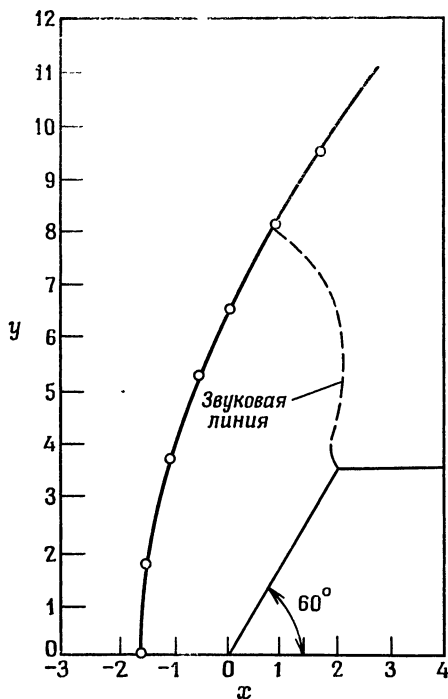


Рис. 6.20. Положение ударной волны и звуковой линии для конуса с углом при вершине 60° и цилиндрической кормовой частью, $M_\infty = 1.81$; \circ NASA TN-2000, — метод расщепления матричных коэффициентов [Chakravarthy et al., 1980].

Рэнкина вычисляют значения этих переменных за ударной волной. Де Ниф и Моретти показали, что изменение скорости ударной волны связано с разницей в решениях для значений зависимых переменных, полученных при помощи двух указанных наборов значений. Как только изменение скорости ударной волны найдено, определяют новое значение скорости ударной волны и рассчитывают новое ее положение.

В заключение этого раздела, посвященного рассмотрению метода расщепления матричных коэффициентов, на рис. 6.18—

6.20 приведены два примера расчета обтекания. На рис. 6.18 показана типичная форма головной ударной волны при обтекании сферы при числе Маха набегающего потока 2.94, а на рис. 6.19 — распределение давления, причем на нем же приведены результаты расчетов работы [Salas, 1979]. На рис. 6.20 представлены ударная волна и звуковые линии при обтекании конуса с углом при вершине 60° с цилиндрической хвостовой частью при числе Маха набегающего потока 1.81. Эти решения были получены методом расщепления матричных коэффициентов, при этом головная ударная волна трактовалась как разрыв. Из методов, пригодных для решения уравнений Эйлера, записанных в недивергентной форме, метод расщепления матричных коэффициентов особенно хорошо себя зарекомендовал в связи с выделением скачка.

§ 6.5. Методы решения уравнения потенциала

Хотя в настоящее время во многих случаях стало возможным численное решение уравнений Эйлера, все же желательно иметь упрощенную систему уравнений, которую можно решать более простым способом при меньших затратах ресурсов ЭВМ. Это могло бы найти применение на этапах предварительного проектирования сверх- и гиперзвуковых летательных аппаратов, когда рассматривается много вариантов аэродинамических конфигураций с попыткой их оптимизации. В задачах такого рода затраты памяти и процессорного времени, требуемые для решения уравнений Эйлера для каждой задачи, чрезмерно велики.

Как хорошо известно в механике жидкости, существует иерархия уравнений, основанная на порядке аппроксимации, который хотят получить, или на допущениях, которые делают при выводе этих уравнений. Если попробовать упростить уравнения Эйлера, то следующим шагом будет рассмотрение решения уравнения полного потенциала.

Уравнение для полного потенциала, записанное либо в дивергентной, либо в недивергентной форме, часто используется в задачах трансзвуковой аэродинамики. При выводе уравнения для полного потенциала требуется, чтобы поток был безвихревым. Кроме того, из уравнения Крокко (5.187) вытекает требование отсутствия производства энтропии. Таким образом, в формулировке задачи для полного потенциала изменение энтропии при прохождении через скачки, даже в сверхзвуковых потоках недопустимо. На первый взгляд это допущение обедняет постановку задачи. Однако практика показывает, что решения уравнений Эйлера и уравнения потенциала отличаются друг от друга незначительно в тех случаях, когда число Маха, рассчитанное по компоненте скорости, нормальной к фронту скачка,

близко к единице. Производство энтропии на слабом скачке зависит от числа Маха по нормальной проекции скорости, и мы можем записать [Liermann, Roshko, 1957]

$$\frac{\Delta s}{R} \alpha \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_n^2 - 1)^3. \quad (6.128)$$

Это подтверждает тот факт, что допущение о постоянстве энтропии при переходе через скачок является разумным, пока число Маха по нормальной проекции скорости достаточно близко к единице. Важно отметить, что это допущение касается локального числа Маха по нормальной проекции скорости, а не числа Маха в свободном потоке.

Если допущение о безвихревом характере течения оправданно, то следует ожидать, что решение уравнения потенциала будет столь же хорошо, как и решение уравнений Эйлера, даже в сверх- и трансзвуковых потоках с ударными волнами. Трудностей при решении уравнений Эйлера нельзя полностью избежать даже сведением задачи к решению уравнения потенциала, так как в любом случае задача остается нелинейной, пусть и упрощенной. Здесь мы обсудим применение уравнения потенциала для расчета сверх- и трансзвуковых течений. Поскольку мы занимаемся практическими приложениями гиперболических уравнений, то начнем со сверхзвуковых стационарных течений, а затем перейдем к трансзвуковым.

Потенциальное приближение уравнений Эйлера можно получить как в дивергентной, так и в недивергентной форме. Двумерные уравнения потенциала в недивергентной форме (5.197) можно записать в виде

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \phi_{xx} - \frac{2uv}{a^2} \phi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \phi_{yy} = 0, \quad (6.129)$$

где

$$u = \partial\phi/\partial x, \quad v = \partial\phi/\partial y, \quad (6.130)$$

и a — скорость звука, которую можно рассчитать по уравнению энергии

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2 + v^2}{2} = H = \text{const}. \quad (6.131)$$

Уравнение (6.129) иногда называют *квазилинейной формой уравнения полного потенциала*. В нашем обсуждении решений уравнения Эйлера отмечалось, что применение недивергентной формы не давало приемлемых результатов на скачках. Однако в случае трансзвуковых течений эта проблема не возникает, так как скачки в этом случае слабые. В настоящем разделе мы

будем рассматривать методы решения уравнения полного потенциала, записанного в дивергентной форме.

Двумерное безразмерное уравнение полного потенциала в дивергентной форме можно записать в виде

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (6.132)$$

где звездочка, обозначающая обезразмеривание функций, опущена, и

$$u = \partial\phi/\partial x, \quad v = \partial\phi/\partial y. \quad (6.133)$$

Плотность рассчитывается по уравнению энергии в виде

$$\rho = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (u^2 + v^2 - 1) \right]^{1/(\gamma-1)}. \quad (6.134)$$

В этой записи плотность и компоненты скорости обезразмеривают по параметрам свободного потока. В случае сверхзвуковой маршевой задачи требуется решать уравнения (6.132) — (6.134) с граничным условием непротекания на поверхности

$$\partial\phi/\partial n = 0 \quad (6.135)$$

и заданным числом Маха в свободном потоке M_∞ . Такая постановка задачи существенно проще, чем решение полных уравнений Эйлера.

Уравнение полного потенциала в недивергентной форме было использовано в работах [Grossman, 1979; Grossman, Siclari, 1980] для расчета обтекания конических и закрученных с несимметричным профилем дельтовидных крыльев. Для получения решений была использована недивергентная формулировка и релаксационная схема для трансзвуковых течений. Сейчас мы опишем маршевую процедуру [Shankar, 1981; Shankar, Chakravarthy, 1981] решения уравнения потенциала, записанного в дивергентной форме, чтобы пояснить идею линеаризации плотности, использованной в этих работах.

Прежде чем обрисовать в общих чертах всю процедуру, необходимо обсудить конечно-разностную аппроксимацию уравнения потенциала. Так как, считая течение безвихревым, мы вводим потенциал, то в нашей системе уравнений отсутствует механизм диссипации. Вследствие постоянства энтропии уравнения потенциала допускают решения в виде скачков разрежения и уплотнения. В расчете дозвуковых течений нет особенностей. В сверхзвуковых потоках невозможно появление скачков разрежения, и их следует исключить из рассмотрения. Эту трудность можно обойти явно или неявно путем введения искусственной вязкости.

Мёрман и Коул [Migman, Cole, 1971] в своей знаменательной работе о трансзвуковых течениях указали, что производные в каждой точке области расчета должны быть корректно аппроксимированы в соответствии с типом уравнения. Они рассматривали трансзвуковое уравнение малых возмущений, но эта же идея применима и для уравнения потенциала.

Чтобы проиллюстрировать конечно-разностную аппроксимацию, зависящую от типа уравнения, рассмотрим уравнение в не-дивергентной форме (6.129). Тип этого уравнения гиперболический в точках, где $(u^2 + v^2)/a^2 - 1 > 0$, и эллиптический в точках, где $(u^2 + v^2)/a^2 - 1 < 0$. Пусть поток направлен вдоль

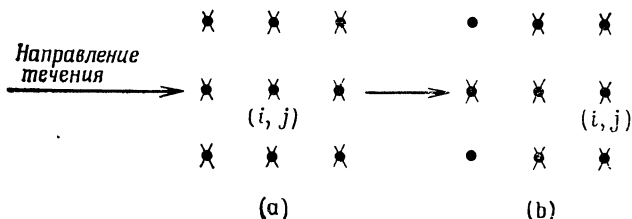


Рис. 6.21. Аппроксимация, зависящая от типа уравнения; (а) точки эллиптичности; (б) точки гиперболичности.

оси x . Если течение дозвуковое, то уравнение эллиптическое и производные аппроксимируются центральными разностями. Если течение сверхзвуковое, то уравнение гиперболическое в рассматриваемой точке и вторые производные в направлении течения (в продольном направлении) берутся со смещением шаблона вверх по потоку. Имеем следующие конечно-разностные выражения для вторых производных в точке (i, j) :

$$\begin{aligned} \phi_{xx} &= \frac{\phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i-2,j}}{(\Delta x)^2}, \\ \phi_{xy} &= \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1}}{2 \Delta x \Delta y}, \\ \phi_{yy} &= \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}. \end{aligned} \tag{6.136}$$

Сеточный шаблон для точек, в которых скорость потока меньше (точки эллиптичности) или больше (точки гиперболичности) скорости звука, показан на рис. 6.21.

Изображенные на рис. 6.21 узлы сетки иллюстрируют корректную зависимость от типа уравнения для до- или сверхзвукового течения. Расположение точек шаблона для стационарного уравнения потенциала говорит в пользу применения неявной

схемы. Если мы имеем дело только со сверхзвуковым течением, т. е. в расчетной области нет точек эллиптичности, то решение можно получить и по явной схеме. Но этого не рекомендуют делать, если в некоторых точках поля течения скорость потока немалого превышает звуковую, так как критерий устойчивости Курранта — Фридрихса — Леви запрещает иметь разумные размеры шага. В этом случае применение явных схем, даже для чисто сверхзвуковых течений, становится непрактичным.

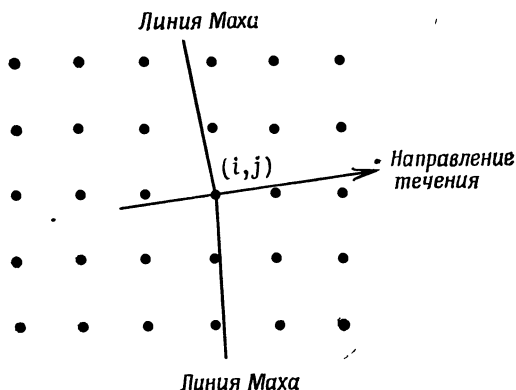


Рис. 6.22. Случай, когда направление сетки не совпадает с направлением течения.

Если построить дифференциальное приближение для конечно-разностного представления ϕ_{xx} в точках гиперболичности, то окажется, что старшие отброшенные члены имеют вид

$$\Delta x (u^2 - a^2) \phi_{xxx}. \quad (6.137)$$

Это эквивалентно введению положительной искусственной вязкости в точках, где $u^2 > a^2$. Если конечно-разностная аппроксимация (6.136) применяется в точке эллиптичности, то искусственная вязкость становится отрицательной и возникает проблема устойчивости. Джеймсон [Jameson, 1974] указал, что эта трудность возникает в тех случаях, когда поток сверхзвуковой и компонента u скорости в направлении x меньше скорости звука. Проблему можно понять, рассматривая случай, когда поток не строго параллелен направлению x , как это показано на рис. 6.22. Шаблон разностной схемы неправильно учитывает область зависимости точки (i, j) . Одна из точек шаблона $(i, j + 1)$ в этом случае расположена перед характеристикой, проходящей через точку (i, j) . Чтобы преодолеть эту трудность, Джеймсон предложил схему, учитывающую разворот потока.

Идея состоит в том, что уравнение потенциала записывается в потоковых координатах в виде

$$(a^2 - V^2)\phi_{ss} + a^2\phi_{nn} = 0, \quad (6.138)$$

где s и n — расстояния, измеряемые вдоль линий тока и по нормали к ним. По правилу дифференцирования сложных функций вторые производные ϕ_{ss} и ϕ_{nn} выражаются через x и y следующим образом:

$$\phi_{ss} = \frac{1}{V^2} (u^2\phi_{xx} + 2uv\phi_{xy} + v^2\phi_{yy}), \quad (6.139)$$

$$\phi_{nn} = \frac{1}{V^2} (v^2\phi_{xx} - 2uv\phi_{xy} + u^2\phi_{yy}).$$

В разностной аппроксимации для ϕ_{ss} производные по x и y берутся со смещением назад (с запаздыванием), тогда как для ϕ_{nn} используются центральные разности. Когда поток направлен вдоль одной из осей координат, схема Джеймсона сводится к уравнению (6.136) и вводит искусственную вязкость с главным членом вида

$$\left(1 - \frac{a^2}{V^2}\right) (\Delta s u^2 \phi_{sss} + \dots). \quad (6.140)$$

Поэтому мы имеем положительную искусственную вязкость во всех точках, где поток сверхзвуковой, и можно надеяться, что скачки будут скачками сжатия. Так понятие искусственной вязкости используется для объяснения свойств решения уравнения полного потенциала. К тем же самым выводам можно прийти путем тщательного анализа конечно-разностных уравнений, рассматривая разные его члены.

В работе [Hafez et al., 1979] при рассмотрении трансзвуковых течений применена идея искусственной сжимаемости для введения искусственной вязкости в сверхзвуковых областях течения. Эту идею впервые предложил Хартен [Harten, 1978], пытаясь улучшить методы сквозного счета для сверхзвуковых течений. Для получения требуемой искусственной вязкости в некоторых работах [Holst, Ballhaus, 1979; Holst, 1979] использовалось смещение шаблона плотности вверх по потоку. Описанный ниже метод включает в себя эти идеи и очень полезен при решении уравнения полного потенциала.

Чтобы понять, как через смещение шаблона при аппроксимации плотности или искусственную сжимаемость вводится искусственная вязкость, полезно рассмотреть одномерное уравнение потенциала

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0. \quad (6.141)$$

Его аппроксимация имеет второй порядок и выражается в следующем виде:

$$\nabla (\rho_{i+1/2} \Delta \phi_i) = 0, \quad (6.142)$$

где обозначения имеют тот же смысл, что и ранее. В точках эллиптичности уравнение (6.142) корректно. В точках гиперболичности следует добавить искусственную вязкость так, как это делает Джеймсон [Jameson, 1975]:

$$-\Delta x (\mu \phi_{xx})_x, \quad (6.143)$$

где

$$\mu = \min \left\{ \begin{array}{l} 0, \\ \rho \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2} \right). \end{array} \right. \quad (6.144)$$

Как говорилось выше, такое явное добавление искусственной вязкости эквивалентно введенной Мёрманом и Коулом [Muirman, Cole, 1971] разностной аппроксимации, зависящей от типа уравнения. Джеймсон [Jameson, 1975] показал, что член (6.143) эквивалентен члену вида

$$-\Delta x (\nu \rho_x \phi_x)_x, \quad (6.145)$$

где

$$\nu = \max \left\{ \begin{array}{l} 0, \\ 1 - \frac{a^2}{\phi_x^2}. \end{array} \right. \quad (6.146)$$

Такое представление получают дискретизацией одномерного уравнения энергии. Если искусственную вязкость в таком виде ввести в уравнение потенциала, то конечно-разностная аппроксимация уравнения (6.141) будет выглядеть так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \approx \nabla [\rho_{i+1/2} \Delta \phi_i] - \nabla [\nu_i (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Delta \phi_i] = 0. \quad (6.147)$$

Было показано [Holst, Ballhaus, 1979], что она имеет второй порядок точности и в дозвуковых зонах эквивалентна аппроксимации уравнения центральными разностями. В сверхзвуковых зонах из-за добавления искусственной вязкости конечно-разностное представление (6.147) является схемой первого порядка с разностями вверх по потоку. По мере увеличения числа Маха шаблон все более смещается вверх по потоку. В дозвуковых зонах шаблон производных плотности не смещается.

Разностное выражение (6.147) можно также записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \approx \nabla (\bar{\rho}_{i+1/2} \Delta \phi_i) = 0, \quad (6.148)$$

если $\bar{\rho}_{i+1/2}$ определить следующим образом:

$$\bar{\rho}_{i+1/2} = (1 - \nu_i) \rho_{i+1/2} + \nu_i \rho_{i-1/2}, \quad (6.149)$$

где значения в центрах ячеек $\rho_{i+1/2}$ получаются из уравнения энергии (6.134), в которое входит только величина u , которая оценивается как $(\phi_{i+1} - \phi_i) / \Delta x$. Из уравнений (6.148) и (6.149) видно, что добавление искусственной вязкости эквивалентно тому, что плотность берется с запаздыванием. Джеймсон [Jameson, 1975] добавляет искусственную вязкость явным образом, тогда как в описываемой здесь схеме она включается посредством представления плотности в специальном виде. Если для искусственной вязкости ν выбирается представление (6.144), то оба метода дают одинаковые результаты. Если $\nu = 0$, то схема хорошо работает только в дозвуковых зонах и неустойчива в сверхзвуковых зонах. Однако если ν равно положительной константе, то схему можно применять как для дозвуковых, так и для сверхзвуковых течений. Следует заметить, однако, что в этом случае результирующая схема дает только первый порядок точности и является сильно диссипативной. Недавно были разработаны схемы второго порядка, в которых значения плотности берутся со смещением [Steinhoff, Jameson, 1981].

Прежде чем применять подход, основанный на введении искусственной сжимаемости или использовании значений плотности со смещением, преобразуем уравнения в вычислительной плоскости (ξ, η) , что позволяет более просто ставить граничные условия. Если выполнить преобразование уравнений к строго дивергентному виду [Viviani, 1974], то уравнение (6.132) принимает вид

$$\left(\rho \frac{U}{J} \right)_{\xi} + \left(\rho \frac{V}{J} \right)_{\eta} = 0, \quad (6.150)$$

где U и V — контравариантные компоненты скорости, задаваемые выражениями

$$U = A_1 \phi_{\xi} + A_2 \phi_{\eta}, \quad V = A_2 \phi_{\xi} + A_3 \phi_{\eta}, \quad (6.151)$$

где

$$A_1 = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad A_2 = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y, \quad A_3 = \eta_x^2 + \eta_y^2, \quad (6.152)$$

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x,$$

а плотность определяется выражением

$$\rho = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 (U\phi_\xi + V\phi_\eta - 1) \right]^{1/(\gamma-1)}. \quad (6.153)$$

Необходимо знать также и метрические коэффициенты. Они связаны с производными физических координат следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_x &= Jy_\eta, & \eta_x &= -Jy_\xi, \\ \xi_y &= -Jx_\eta, & \eta_y &= Jx_\xi. \end{aligned} \quad (6.154)$$

6.5.1. Методы для сверхзвуковых течений

Для демонстрации процедуры решения уравнения полного потенциала для сверхзвуковых течений выберем ξ в качестве маршевого направления, и пусть на слое i и всех предшествующих слоях нам известна вся информация. Наша задача состоит в получении значения ϕ на слое $i+1$. Первый член уравнения потенциала аппроксимируем в точке $(i+1/2, j)$, а второй — в (i, j) или в $(i+1, j)$ для полностью неявной схемы.

Рассмотрим первый член уравнения (6.150): $\partial/\partial\xi(\rho U/J)$. Чтобы получить решение в следующих точках по направлению ξ , разложим ρ в ряд относительно известных величин i -го слоя. Так как ρ явно зависит от компонент скорости, запишем

$$\rho = \rho(\phi_x, \phi_y) \quad \text{и} \quad \rho = \rho_i + \Delta\rho, \quad (6.155)$$

где

$$\Delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial\phi_x} \Delta\phi_x + \frac{\partial\rho}{\partial\phi_y} \Delta\phi_y.$$

Если плотность выразить из уравнения (6.153), а U и V — из уравнения (6.151), то изменение плотности запишется в виде

$$\Delta\rho = -\frac{\rho_i}{a_i^2} \left(U_i \frac{\partial}{\partial\xi} + V_i \frac{\partial}{\partial\eta} \right) \Delta\phi, \quad (6.156)$$

где $\Delta\phi = \phi - \phi_i$, $\Delta\phi_i = \phi_i - \phi_{i-1}$. Выражая плотность из уравнения (6.155) и U из (6.151), производную по ξ в уравнении потенциала можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\rho \frac{U}{J} \right) &= \frac{\partial}{\partial\xi} \left\{ \left[\left(\frac{\rho_i A_1}{J} - \frac{\rho_i U_i^2}{a_i^2 J_i} \right) \frac{\Delta\phi}{\Delta\xi} + \frac{\rho_i U_i^2}{a_i^2 J_i} \frac{\Delta\phi_i}{\Delta\xi} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{\rho_i A_2}{J} - \frac{\rho_i U_i V_i}{a_i^2 J_i} \right) \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\eta} + \frac{\rho_i A_2}{J} \frac{\partial\phi_i}{\partial\eta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.157)$$

Если используется конечно-разностная аппроксимация первого порядка против потока

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial \xi} = \frac{1}{\Delta \xi} [(\quad)_{i+1, j} - (\quad)_{i, j}], \quad (6.158)$$

то главный член ошибки аппроксимации есть

$$\frac{\rho_i}{J_i a_i^2} \left[1 - \frac{a_i^2 A_1}{U_i^2} \right] U_i^2 \phi_{\xi\xi\xi} \Delta \xi. \quad (6.159)$$

Это дает положительную искусственную вязкость, когда

$$U_i^2 / A_1 > a_i^2. \quad (6.160)$$

Последнее условие должно быть выполнено, если решается маршевая задача для уравнения потенциала в случае сверхзвукового течения. Если условие (6.160) не выполняется, искусственная вязкость становится отрицательной и это ведет к неустойчивости. Отметим, что возникающие в уравнении (6.157) смешанные производные аппроксимируются разностями против потока, зависящими от знаков коэффициентов при них, чтобы обеспечить преобладание диагональных членов в случае неявной схемы. Производная по η для уравнения потенциала вычисляется в точке $i + 1$:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \frac{V}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\rho}{J} (A_2 \phi_\xi + A_3 \phi_\eta) \right]_{i+1, j},$$

что приводит к неявному алгоритму по маршевой координате. Если это разностное выражение записать через разность потенциалов $\Delta \phi$, то

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho V}{J} \right) = \left(\frac{\rho_{i+1}^n A_2}{J} \frac{\Delta \phi}{\Delta \xi} \right)_\eta + \left(\frac{\rho_{i+1}^n A_3}{J} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial \eta} \right)_\eta + \left(\frac{\rho_{i+1}^n A_3}{J} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right)_\eta, \quad (6.161)$$

где ρ_{i+1}^n — плотность на n -й итерации в точке сетки $i + 1$. На каждом шаге при продвижении по ξ новое значение плотности должно определяться путем итераций. В большинстве задач оказывается, что этот процесс состоит из одной-двух итераций. Чтобы корректно ввести искусственную вязкость, шаблон при аппроксимации плотности смещается против потока (см. [Holst, 1979; Hafez et al., 1979]). Значение ρ_{i+1}^n в уравнении (6.161) заменяется выражением

$$\bar{\rho}_{i+1, j+1/2} = [(1 - \nu) \rho_{i+1}^n]_{i+1, j+1/2} + \nu_{i+1, j+1/2} (\rho_{i+1}^n)_{i+1, j+1/2+m}, \quad (6.162)$$

где

$$m = \begin{cases} -1, & V_{i+1, j+1/2} > 0, \\ +1, & V_{i+1, j+1/2} < 0, \end{cases}$$

$$v_{i+1, j+1/2} = \left[1 - \left(\frac{1}{M^n} \right)^2 \right]_{i+1, j+s}, \quad (6.163)$$

причем $s = 0$ для $V_{i+1, j+1/2} > 0$ и $s = 1$ для $V_{i+1, j+1/2} < 0$. Такое представление плотности [уравнения (6.162) и (6.163)] вводит положительную искусственную вязкость во всех точках, где $M_{i+1}^n > 1$ (скорость потока сверхзвуковая). Поскольку мы рассматриваем маршевую процедуру решения уравнения потенциала для сверхзвуковых течений, то метод оказывается несостоятельным, когда поток дозвуковой и искусственная вязкость становится отрицательной.

Чтобы найти решение на слое $i + 1$, зададим на нем неявные граничные условия. В любой плоскости симметрии можно воспользоваться простым отражением. Например, в двумерной задаче, когда делают проход по направлению η , можно ставить это условие на границе (считаем, что симметричные граничные условия мы имеем при $j = j_{\max} - 1$), задавая

$$(\Delta\phi)_{i+1, j_{\max}} = (\Delta\phi)_{i+1, j_{\max}-2}. \quad (6.164)$$

Постановка граничных условий на поверхности тела почти такая же простая. Если система координат предполагается адаптированной к поверхности тела, то в двумерном случае на поверхности тела можно задавать условие типа

$$V = A_2\phi_\xi + A_3\phi_\eta = 0.$$

Для задания граничных условий на поверхности ($j = 2$) тела можно воспользоваться фиктивной точкой ($j = 1$), расположенной под поверхностью. Пусть

$$0 = V_{i+1, 2} = A_2 \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\xi} \right)_{i+1, 2} + A_3 \frac{(\Delta\phi + \phi_{i+1}^n)_{i+1, 3} - (\Delta\phi + \phi_{i+1}^n)_{i+1, 1}}{2\Delta\eta}. \quad (6.165)$$

Это выражение используется для исключения из уравнения на границе значения функции в фиктивной точке ($j = 1$). В расчете с неявным граничным условием отсутствует ограничение на размер шага по маршевой координате, которое может возникнуть из-за наличия границы. К тому же неявное задание граничных условий ускоряет сходимость итерационного процесса нахождения плотности на каждом шаге по ξ .

В конечном счете процесс вычислений сводится к решению трехдиагональной системы уравнений для $\Delta\phi$. В этом легко убедиться, рассматривая систему, записанную в виде

$$\left[1 + \frac{C_1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} (C_2) + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(C_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \Delta\phi = R, \quad (6.166)$$

где C_1 , C_2 , C_3 и β — коэффициенты при членах с производными, а R — известная правая часть уравнения. В качестве упражнения читателю предлагается найти выражения для этих членов

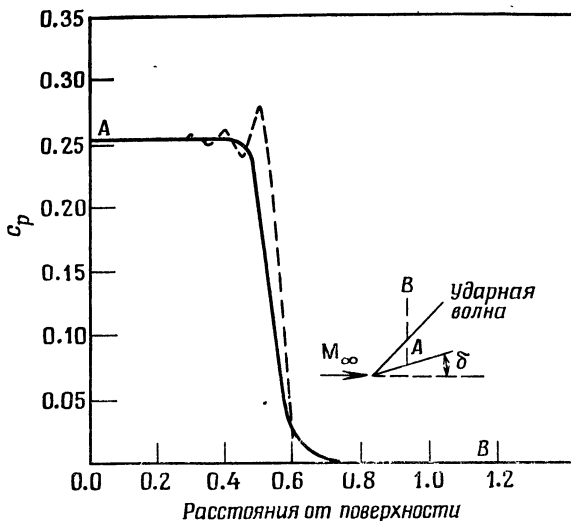


Рис. 6.23. Решение уравнения потенциала для обтекания клина; — уравнение полного потенциала (скаляр); — — — уравнения Эйлера.

(см. задачу 6.15). Решая трехдиагональную систему, находим $\Delta\phi$. Зная $\Delta\phi$, вычисляем ρ_{i+1} . Это новое значение плотности используется для расчета новой величины $\Delta\phi$ из уравнения (6.166), и этот итерационный процесс повторяется, пока не будет достигнута сходимость. В трехмерном случае следуют той же процедуре с той лишь разницей, что решение для $\Delta\phi$ получают, используя приближенную факторизацию, что требует решения трехдиагональных систем по направлениям η и ζ .

Шанкар и Ошер [Shankar, Osher, 1982] применили описанную выше процедуру для решения уравнения полного потенциала. Вместо простой линеаризации плотности по уравнению (6.155) здесь разлагают в ряд произведение плотности и контрвариантной компоненты скорости по направлению ξ в виде

$$(\rho U)_{i+1} = (\rho U)_i + \Delta(\rho U).$$

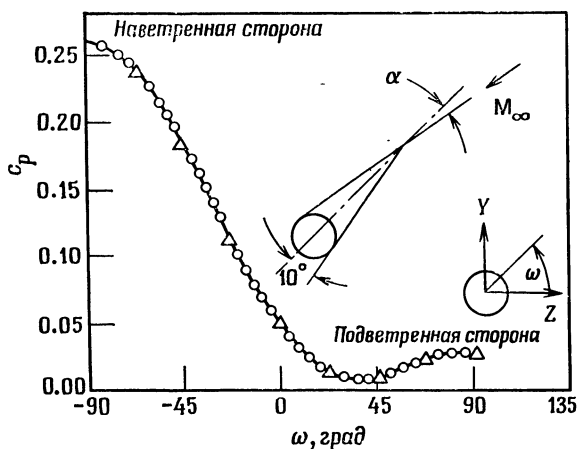


Рис. 6.24. Обтекание кругового конуса, $M_\infty = 2.0$, $\alpha = 10^\circ$; \circ уравнение полного потенциала; \triangle уравнения Эйлера.

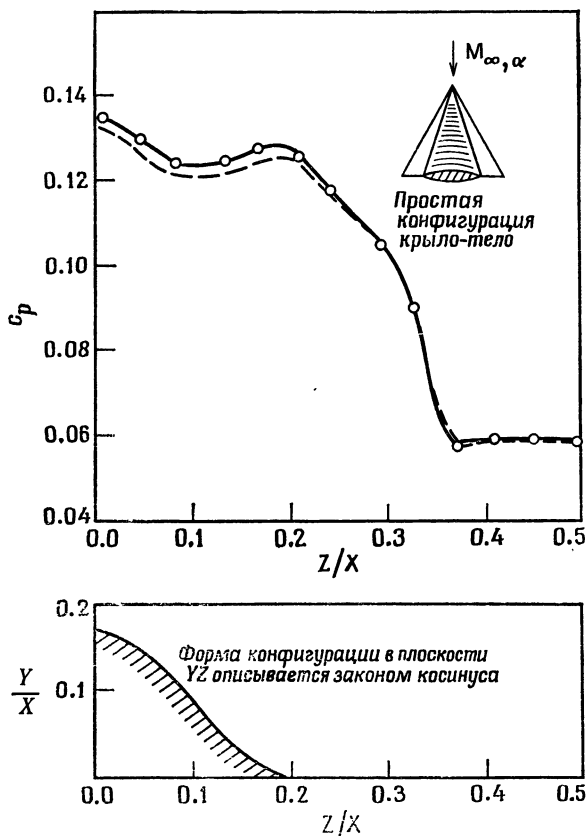


Рис. 6.25. Обтекание конфигурации крыло — тело. — уравнение полного потенциала; - - - уравнения Эйлера.

Помимо этого использовали разности вверх по потоку, взятые на характеристиках гиперболической системы уравнений. Такое представление производных вверх по потоку обеспечивает наиболее четкое применение искусственной вязкости, нежели искусственной сжимаемости или смещение шаблона вверх по потоку при аппроксимации плотности.

На рис. 6.23—6.25 приведены типичные результаты расчета [Shankar, Chakravarthy, 1981]. При расчете обтекания клина по уравнениям Эйлера методом сквозного счета второго порядка точности получаем осцилляции на ударной волне. Результаты расчета обтекания конуса (рис. 6.24) и простой конфигурации крыло — тело (рис. 6.25) хорошо согласуются с решениями уравнений Эйлера. В некоторых случаях решение уравнений полного потенциала требует на порядок меньше машинного времени. Этот подход рекомендуется применять в задачах расчета сверхзвуковых течений, тогда справедливо уравнение потенциала.

6.5.2. Методы расчета трансзвуковых течений

Уравнение полного потенциала используется для описания трансзвуковых течений, когда интенсивность ударных волн мала. Разработанные недавно схемы используют идею смещения шаб-

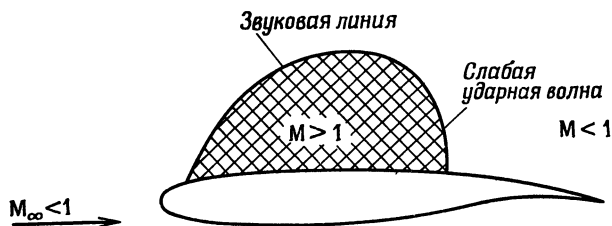


Рис. 6.26. Трансзвуковой профиль.

лона вверх по потоку при аппроксимации плотности, и метод Холста и Боллхауза [Holst, Ballhaus, 1979] является очень показательным.

Рассмотрим обтекание двумерного профиля, причем число Маха набегающего потока M_∞ таково, что возможно образование местных сверхзвуковых зон. Такая ситуация изображена на рис. 6.26. Обтекание этого профиля невязкой жидкостью рассчитывают, решая уравнение полного потенциала. При решении этой задачи физическая область течения отображается

на вычислительную плоскость (ξ, η) так, что поверхность профиля $\eta = \text{const}$ — ее внешняя граница. Координату ξ определяют так, что нижняя сторона воображаемого разреза вдоль прямой, сходящей с задней кромки, есть поверхность $\xi = \text{const}$.

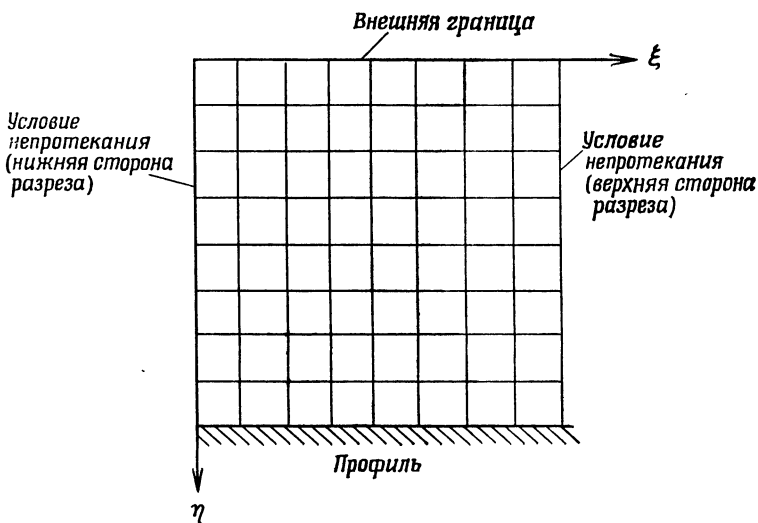


Рис. 6.27. Вычислительная плоскость для трансзвукового профиля.

Координата ξ возрастает при обходе контура до величины ξ_{max} на верхней границе вихревой пелены (верхняя сторона разреза). Вычислительная плоскость показана на рис. 6.27. Вопросы отображения физической области на вычислительную будут рассматриваться в гл. 10.

Наша задача — решить уравнение полного потенциала (6.150) — (6.152) для случая обтекания трансзвуковым потоком профиля, изображенного на рис. 6.26. Обозначения имеют тот же смысл, что и при рассмотрении сверхзвуковых маршевых задач.

Конечно-разностная аппроксимация второго порядка уравнения (6.150) может быть записана в виде

$$\nabla_{\xi} \left(\frac{\rho U}{J} \right)_{i+1/2, j} + \nabla_{\eta} \left(\frac{\rho V}{J} \right)_{i, j+1/2} = 0. \quad (6.167)$$

В этом выражении контравариантные компоненты скорости имеют вид

$$U_{i+1/2, j} = (A_1)_{i+1/2, j} (\phi_{i+1, j} - \phi_{i, j}) + \\ + \frac{1}{4} (A_2)_{i+1/2, j} (\phi_{i+1, j+1} - \phi_{i+1, j-1} + \phi_{i, j+1} - \phi_{i, j-1}), \quad (6.168)$$

$$V_{i, j+1/2} = \frac{1}{4} (A_2)_{i, j+1/2} (\phi_{i+1, j+1} - \phi_{i-1, j+1} + \phi_{i+1, j} - \phi_{i-1, j}) + \\ + (A_3)_{i, j+1/2} (\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j}),$$

где значения в полущелых узлах получают усреднением, а величины A определяют по уравнению (6.152). Такое представление справедливо для дозвуковых областей течения. Теперь введем смещение назад при аппроксимации плотности и заменим уравнение (6.167) следующим:

$$\nabla_{\xi} \left[\bar{\rho}_i \left(\frac{U}{J} \right)_{i+1/2, j} \right] + \nabla_{\eta} \left(\rho \frac{V}{J} \right)_{i, j+1/2} = 0, \quad (6.169)$$

где

$$\bar{\rho}_i = (1 - v_{i+k, j}) \rho_{i+1/2, j} + v_{i+k, j} \rho_{i+2k-1/2, j}, \quad (6.170)$$

$$k = \begin{cases} 0, & U_{i+1/2, j} > 0, \\ 1, & U_{i+1/2, j} < 0. \end{cases} \quad (6.171)$$

Для искусственной вязкости выбираем выражение

$$v = \max \left[0, C_1 \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \right],$$

где константа C_1 равна единице для малых сверхзвуковых областей, но должна быть увеличена в областях, где интенсивность скачка значительна. Такая постановка задачи для уравнения полного потенциала может быть пригодной для всей области течения независимо от типа уравнения.

Получающееся разностное уравнение можно решать различными способами. Холст и Боллхауз делали это как обычным методом последовательной верхней релаксации по линиям, так и с использованием *схемы приближенной факторизации*. Обсудим схему приближенной факторизации Холста, называемую ПФ2-схемой, поскольку методы последовательной верхней релаксации были описаны при рассмотрении других систем уравнений.

Схема приближенной факторизации (и многие другие) в случае релаксационной задачи, описываемой уравнением вида $L\phi = 0$, где L — некоторый дифференциальный оператор, для уравнения полного потенциала может быть записана в виде

$$NC^n + \omega L\phi^n = 0, \quad (6.172)$$

где ω — параметр релаксации, C^n — поправка ($\phi^{n+1} - \phi^n$), $L\phi^n$ — невязка (приближенное решение не удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных) и N — оператор, определяющий тот или иной итерационный метод. В схемах приближенной факторизации N представляют в виде произведения двух или более операторов: $N = N_1 N_2$. Операторы N_1 и N_2 следует выбирать так, чтобы их произведение аппроксимировало L . При этом годятся только простые матричные операции и схема в целом будет устойчивой. В ПФ2-схеме, которую использовал Холст, оператор N представляется в виде

$$\alpha N C_{i,j}^n = - \left[\alpha - \Delta_\eta \left(\frac{\rho A_3}{J} \right)_{i,j-1/2} \right] \left[\alpha \nabla_\eta - \nabla_\xi \bar{\rho}_i \left(\frac{A_1}{J} \right)_{i+1/2,j} \Delta_\xi \right] C_{i,j}^n, \quad (6.173)$$

где α — свободный параметр, который можно интерпретировать как $(\Delta t)^{-1}$. Некоторый набор α используется во время вычислений для подавления высоко- и низкочастотных ошибок в решении. Холст и Боллхауз [Holst, Ballhaus, 1979] привели один такой набор. Его можно использовать и для других расчетов обтекания трансзвуковых профилей. При этом ПФ2-схема работает почти оптимально.

В ПФ2-схеме уравнения (6.173) решение определяется при помощи двухшаговой процедуры:

$$\begin{aligned} \left[\alpha - \Delta_\eta \left(\frac{\rho A_3}{J} \right)_{i,j-1/2} \right] \hat{f}_{i,j}^n &= \alpha \omega L \phi_{i,j}^n, \\ \left[\alpha \nabla_\eta - \nabla_\xi \bar{\rho}_i \left(\frac{A_1}{J} \right)_{i+1/2,j} \Delta_\xi \right] C_{i,j}^n &= \hat{f}_{i,j}^n, \end{aligned} \quad (6.174)$$

где $\hat{f}_{i,j}^n$ — результат на промежуточном шаге. На первом шаге $\hat{f}_{i,j}$ получают из решения двухдиагональной системы, аналогичной той, которая встречалась в факторизованной схеме с расщепленными потоками в § 6.3. На втором шаге требуется решать уже трехдиагональную систему. Направление расчета на шаге 1 — от профиля, на шаге 2 — к профилю. В этой схеме нет ограничения на направление расчета в зависимости от направления потока. Однако при использовании других методов, например метода последовательной верхней релаксации, необходимо следить, чтобы в сверхзвуковых зонах направление расчета совпадало с направлением потока. Это как бы соответствует введению стабилизирующего члена $\phi_{\xi i}$.

Джеймсон [Jameson, 1974] подчеркивал, что при решении уравнения потенциала вблизи звуковой линии возникают трудности с устойчивостью. Чтобы обойти их, в разностную схему добавляют времениподобные члены. Последние имеют вид $\phi_{\xi i}$

и $\phi_{\eta t}$ и обычно включаются в операторы в релаксационных схемах. В нашем случае к операторам на втором шаге уравнения (6.174) добавляются члены типа $\alpha K_1 \nabla_{\xi}$, $\alpha K_1 \Delta_{\xi}$. Используются только разности вверх по потоку и обычно только в сверхзвуковых областях. Знак этих членов выбирается так, чтобы величина диагонального члена росла на втором шаге уравнения (6.174), что обеспечивает диагональное преобладание. Было показано [Hafez et al., 1979], что добавлением этих времениподобных членов можно произвести модификацию зависимости для плотности. Она осуществляется добавлением члена ϕ_t к квадрату скорости в уравнении для плотности (6.153). Такой подход также обеспечивает стабилизирующую добавку, вид которой близок к той, что предложил Джеймсон.

При постановке граничных условий на профиле используются фиктивные точки внутри стенки, чтобы можно было задать условие отражения. Условие $V = 0$ на профиле задается как

$$\left(\frac{\rho V}{J}\right)_{t, NJ-1/2} = -\left(\frac{\rho V}{J}\right)_{t, NJ+1/2} \quad (6.175)$$

в фиктивных точках, где NJ — точка на поверхности профиля. В этих расчетах граничное условие задается явным образом.

Если подъемная сила профиля равна нулю, значения потенциала скорости и плотности на внешней границе сохраняются постоянными и равными значениям в набегающем потоке. Для ненулевой подъемной силы эти величины на внешней границе должны давать циркуляцию, совместимую (совпадающую) с завихренностью, найденной из решения, и обновляемую в конце каждой итерации. В конце каждой итерации циркуляция рассчитывается по скачку потенциала скорости на задней кромке:

$$\Gamma = \phi_{uTE} - \phi_{lTE} \quad (6.176)$$

В начале следующей итерации скачок потенциала скорости задается вдоль всей вихревой пелены. Поправка определяется как разность при переходе через вихревую пелену

$$\Gamma^{n+1} - \Gamma^n = C_u^n - C_l^n, \quad (6.177)$$

где

$$\Gamma^{n+1} = 3(\Gamma^n - \Gamma^{n-1}) + \Gamma^{n-2}. \quad (6.178)$$

На рис. 6.28 показаны результаты расчета трансзвукового обтекания профиля NASA 0012. На нем приведено сравнение коэффициентов давления, вычисленных по ПФ2-схеме, с коэффициентами, взятыми из работы Лока [Lock, 1970]. ПФ2-схема работает хорошо, о чем свидетельствуют полученные результаты,

и является высокоэффективной процедурой расчета трансзвукового обтекания профилей, будучи объединенной с процедурой построения сетки. Кроме того, эту схему можно использовать и для расчета трехмерных конфигураций. Холст [Holst, 1980] распространил свой подход на расчеты обтекания трехмерных

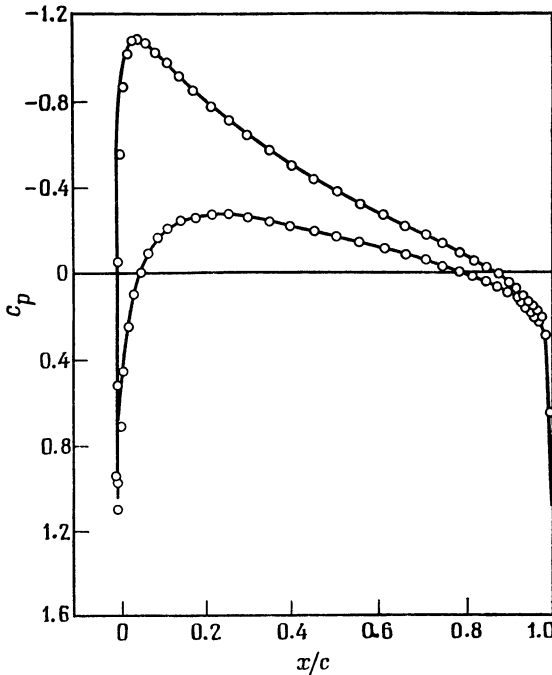


Рис. 6.28. Распределение коэффициента давления c_p на профиле NASA 0012; $\alpha = 2^\circ$, $M_\infty = 6.63$; \circ $c_L = 0.334$ [Holst, 1979]; — $c_L = 0.335$ [Lock, 1970].

крыльев. Его процедура является дальнейшим развитием двумерного метода.

Следует отметить особо один очень важный момент. В двумерном случае использование схемы, в которой шаблон при аппроксимации плотности сдвигается назад по направлению ξ , оказывается достаточной мерой. Если сверхзвуковой поток достигает задней кромки, то и в направлении η также необходимо использовать разности против потока. В трехмерных расчетах обтекания крыльев разности против потока используются и в направлении размаха крыла, и в направлении хорды. Если сверхзвуковые области возникают вблизи задней кромки, разности

против потока необходимо использовать и в нормальном направлении.

В работе [Hafez et al., 1979] указано, что члены с искусственной вязкостью, возникающие при разностном представлении плотности разностями против потока, можно рассматривать как аппроксимации уравнений Навье—Стокса. Было получено вязкое трансзвуковое уравнение малых возмущений [Sichel, 1963]

$$(1 - M^2) \phi_{xx} + \phi_{yy} = -\nu \phi_{xxx}. \quad (6.179)$$

Здесь вязкие члены имеют ту же форму, что и искусственная вязкость, добавленная в сверхзвуковых областях явным образом, или искусственная вязкость или искусственная сжимаемость, вводимые за счет модификации разностного представления плотности.

И последнее замечание по поводу уравнения полного потенциала. Стейнхофф и Джеймсон [Steinhoff, Jameson, 1981] сообщают, что были получены неединственные решения уравнения потенциала в случае трансзвукового течения. В этих расчетах число Маха изменялось в диапазоне от 0.82 до 0.85 и задача обтекания профиля Жуковского с толщиной 11.8 % имела более одного решения при данных условиях. В этом есть что-то настораживающее, и должны быть предприняты дальнейшие исследования численных решений уравнений Эйлера и уравнений Навье—Стокса для таких условий. Это позволит ответить на вопрос, является ли неединственность свойством уравнения полного потенциала или это физическое явление. Предварительное изучение уравнений Эйлера, по-видимому, говорит в пользу первой гипотезы.

§ 6.6. Уравнения малых возмущений для трансзвуковых течений

В предыдущем разделе речь шла о расчетах трансзвуковых течений невязкой жидкости при помощи уравнения полного потенциала. Результаты, полученные для профилей и некоторых трехмерных конфигураций, очень хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Методы решения уравнения полного потенциала очень эффективны, поэтому они широко применяются. Известно, однако, много случаев, когда нет необходимости решать уравнение для полного потенциала, и достаточно точности, которую обеспечивает решение уравнения малых возмущений. К тому же простота постановки граничных условий делает его применение еще более привлекательным. В двумерном случае граничные условия ставят на линии разреза, в трехмерном — на плоскости. Уравнения существенно упрощаются, так как отпадает необходимость отображения об-

ластей сложной формы на более простые для удобства постановки граничных условий. Это в свою очередь приводит к тому, что потребности в ресурсах ЭВМ (процессорное время и память) значительно уменьшаются, особенно в трехмерных задачах.

Трансзвуковое уравнение малых возмущений можно получить применением процедуры разложения в ряд [Cole, Messiter, 1957; Hayes, 1966], что дает возможность систематическим образом получать приближения уравнений Эйлера все более высокого порядка. В гл. 5 трансзвуковое уравнение малых возмущений (5.203) было выведено в предположении малости возмущений. В безразмерной форме его можно записать в виде

$$[K - (\gamma + 1)\phi_x]\phi_{xx} + \phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0, \quad (6.180)$$

где K — параметр подобия:

$$K = (1 - M_\infty^2)/\delta^{2/3}, \quad (6.181)$$

здесь δ — максимальная относительная толщина профиля и f — функция формы профиля, определяемая выражением

$$y = \delta f(x). \quad (6.182)$$

Потенциал скорости в уравнении (6.180) — возмущенный потенциал, определяемый так, что производная ϕ по x есть возмущенная скорость по координате x , обезразмеренная по скорости набегающего потока и параметру подобия по направлению y . Масштабированная координата \tilde{y} определяется так:

$$\tilde{y} = \delta^{1/3}y. \quad (6.183)$$

Уравнение (6.180) формально эквивалентно уравнению (5.203), и оба они являются разновидностями трансзвуковых уравнений малых возмущений Гудерлея — Кармана. Уравнение (6.180), куда входит параметр подобия K , через который выражаются законы подобия, было использовано Мёрменом и Коулом [Migman, Cole, 1971] для расчета обтекания невязкой жидкостью профиля с нулевой подъемной силой. Коэффициент давления определяют так же, как и в случае уравнения (5.205), тогда можно записать $C_p = -2\phi_x$. Для течений, которые нельзя считать трансзвуковыми, мы получаем уравнение Прандтля — Глауэрта для до- и сверхзвуковых течений. Оно уже не раз приводилось в предыдущих главах и выглядит так:

$$(1 - M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0. \quad (6.184)$$

Основная его особенность в том, что оно нелинейно и меняет свой тип от эллиптического к гиперболическому, как и уравнения Эйлера, и уравнение полного потенциала.

В уже упомянутой статье Мёрмен и Коул рассматривали трансзвуковое обтекание профиля с нулевой подъемной силой и решали трансзвуковое уравнение малых возмущений (6.180). Граничные условия на поверхности тела при нулевом угле атаки ставятся в плоскости $\tilde{y} = 0$ и выражаются в виде

$$\phi_{\tilde{y}}(x, 0) = f'(x), \quad (6.185)$$

что совместимо с теорией. На внешней границе расчетной сетки также необходимо сформулировать граничное условие. В нашем случае для дальнего поля

$$\phi \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{K}} \frac{Mx}{x^2 + K\tilde{y}^2}, \quad (6.186)$$

где

$$M = 2 \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi + \frac{\gamma+1}{2} \int \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta, \quad (6.187)$$

а профиль находится в интервале $-1 \leq x \leq 1$.

В случае профиля с ненулевой подъемной силой следует задавать циркуляцию, причем ее величина должна удовлетворять условию Жуковского — Кутты на задней кромке. Условие для дальнего поля в этом случае есть вихрь, величина циркуляции которого определяется условием Жуковского — Кутты. Постановка граничных условий для дальнего поля дана в работах [Ludford, 1951; Klunker, 1971].

Мёрмен и Коул решали уравнение (6.180) для трансзвукового профиля без подъемной силы методом релаксации по линиям. В сверхзвуковых областях (точках гиперболичности) использовались разности против потока, а в точках эллиптичности — центральные разности. Профиль теперь изображается линией, или разрезом, расположенным вдоль оси x , и на нем ставятся граничные условия. В данном случае профиль расположен в центральной точке между двумя узлами, как показано на рис. 6.29. Граничное условие при $\tilde{y} = 0$ задается наклоном линии контура тела или производной от ϕ , как это следует из уравнения (6.185). В точке $(i, 1)$ производная $\phi_{\tilde{y}\tilde{y}}$ представляется в разностном виде

$$\phi_{\tilde{y}\tilde{y}} = \frac{1}{\Delta\tilde{y}} (\phi_{\tilde{y}i, 3/2} - \phi_{\tilde{y}i, 1/2}) = \frac{1}{\Delta\tilde{y}} \left[\frac{\phi_{i, 2} - \phi_{i, 1}}{\Delta\tilde{y}} - \phi_{\tilde{y}}(x, 0) \right]. \quad (6.188)$$

Граничное условие на поверхности профиля входит в расчет явно через член с $\phi_{\tilde{y}}$.

На рис. 6.30 приведено распределение давления на круговом профиле, полученное из решения трансзвукового уравнения

малых возмущений. Как можно видеть, результаты расчета хорошо согласуются с данными эксперимента [Кнеchtel, 1959] как в докритическом, так и в сверхкритическом случаях. Интересно отметить, что местоположение и интенсивность ударной волны в этом примере подтверждены экспериментальными измерениями.

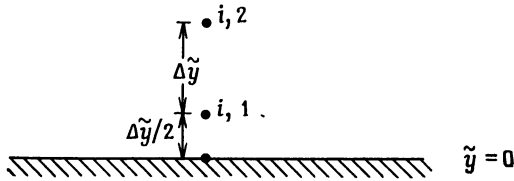


Рис. 6.29. Распределение точек сетки вблизи твердой границы.

ниями. Вычисления по записанным в недивергентной форме уравнениям теории малых возмущений для течений невязкой жидкости дают заниженные значения интенсивности ударной

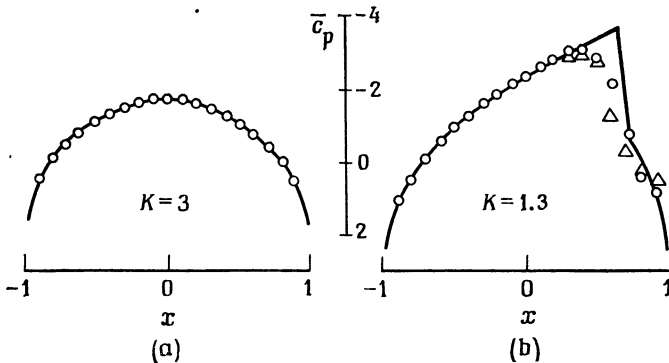


Рис. 6.30. Распределение коэффициента давления \bar{c}_p для кругового профиля; (а) докритический случай; (б) сверхкритический случай. — [Migman, Cole, 1971]; эксперимент ($\delta = 0.06$) [Кнеchtel, 1959]: \circ $Re_c \approx 2 \cdot 10^6$, \triangle $Re_c \approx 2 \cdot 10^6$ (малая шероховатость).

волны. Точно так же на положение и интенсивность ударной волны влияет ее взаимодействие с пограничным слоем. Поэтому недивергентная форма записи является очень распространенной, хотя с математической точки зрения дивергентная более привлекательна. Метод Мёрмена и Коула решения трансзвукового уравнения малых возмущений имеет многочисленные приложения, и предложено много его усовершенствований. Однако всегда надлежит помнить, что его применение означает существенное

упрощение задачи по сравнению с решением уравнений Эйлера или уравнения полного потенциала.

При рассмотрении задачи обтекания трехмерных крыльев Бейли и Боллхауз [Bailey, Ballhaus, 1972] использовали упрощенную форму трансзвукового уравнения малых возмущений. Их работа привела к разработке широко применяемой в настоящее время программы расчета трансзвукового обтекания трехмерных крыльев. Она широко использовалась при проектировании крыльев с улучшенными аэродинамическими характеристиками для полетов на трансзвуковых скоростях. Статью Бейли и Боллхауза можно рекомендовать изучать тем, кто интересуется расчетом трехмерного трансзвукового обтекания крыльев.

В настоящее время большая часть усилий при расчете трансзвуковых течений затрачивается на разработку методов расчета уравнения полного потенциала или уравнений Эйлера. И только задачи проектирования остаются единственной областью более или менее интенсивного приложения трансзвукового уравнения малых возмущений. При проектировании задается распределение давления на поверхности тела и задача состоит в определении формы тела. В задачах такого рода упрощенный подход имеет много достоинств.

§ 6.7. Методы решения уравнения Лапласа

Численные методы, описанные в предыдущих разделах настоящей главы, применялись для решения нелинейных уравнений динамики невязкой жидкости. Для моделирования как внешних, так и внутренних течений часто используются линейные уравнения с частными производными. К их числу относятся уравнение Лапласа для безвихревого течения невязкой несжимаемой жидкости и уравнение Прандтля — Глауэрта, справедливое для течения сжимаемой жидкости в предположении о малости возмущений. Методы решения этих двух уравнений аналогичны. Обзор конечно-разностных методов решения уравнения Лапласа был сделан в гл. 4, и здесь мы не будем повторяться. Вместо этого обсудим основные идеи панельных методов, получивших широкое распространение в промышленных расчетах.

Преимущество панельных методов состоит в том, что распределение давления на поверхности тела можно получить, не определяя поле течения вокруг тела. В этом случае задача сводится к решению системы алгебраических уравнений для интенсивностей источников, диполей или вихрей, распределенных на границах. Зная эти величины, можно вычислить распределение давления на поверхности тела. Панельные методы требуют решения большой системы алгебраических уравнений. Для большинства

практических конфигураций быстродействие и память современных ЭВМ позволяют это делать. Однако для получения хорошего решения существенны адекватный выбор количества панелей и их расположение на поверхности.

При изучении панельных методов будем рассматривать безвихревое течение невязкой несжимаемой жидкости, которое описывается уравнением Лапласа для потенциала скорости. Потребуем

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (6.189)$$

и зададим на границах рассматриваемой области либо ϕ , либо $d\phi/dn$. Для простоты ограничимся рассмотрением двумерного

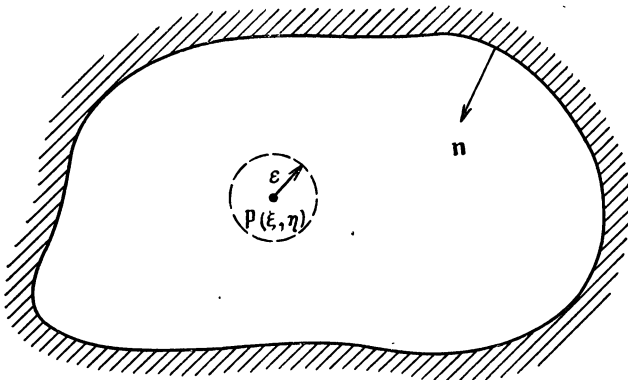


Рис. 6.31. Физическая область для уравнения Лапласа.

случая, хотя принципиально он ничем не отличается от трехмерного. Рассматриваемая область изображена на рис. 6.31. В основе всех панельных методов лежит замена решения уравнения Лапласа в рассматриваемой области некоторым поверхностным интегралом за счет применения второй формулы Грина к интересующей нас области. Пусть функции u и v имеют непрерывные производные вплоть до производных второго порядка (функции u и v принадлежат к классу C^{II}), тогда вторая формула Грина может быть записана в виде

$$\iint_A (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dA = \int_S (v \nabla u - u \nabla v) \cdot \mathbf{n} ds,$$

где \mathbf{n} — единичная нормаль к границе и l — элемент дуги вдоль границы. Выберем в качестве u потенциал ϕ , а в качестве v — функцию вида $v = \ln(r)$, где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. Пусть (ξ, η) — координаты точки P , в которой следует определить потенциал, а (x, y) — координаты точки Q на границе, в ко-

торой расположен источник. При вычислении интегралов в формуле Грина следует быть особенно внимательным по мере приближения точки (ξ, η) к (x, y) , т. е. когда $r \rightarrow 0$. Чтобы избежать связанных с этим обстоятельством трудностей, вообразим, что вокруг точки $P(\xi, \eta)$ построена окружность малого радиуса ε , и применим формулу Грина к области, заключенной между границей B рассматриваемой области и этой малой окружностью. Имеем

$$0 = \oint_B (v \nabla u - u \nabla v) \cdot \mathbf{n} \, ds - \oint_\varepsilon (v \nabla u - u \nabla v) \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Во втором интеграле заменим u и v их зависимостями от ϕ и r :

$$\oint_\varepsilon [\ln(r) \nabla \phi - \phi \nabla \ln(r)] \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

На окружности малого радиуса r равно ε , и этот интеграл можно записать в виде $\ln(\varepsilon) \left[\oint \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, ds \right] - \oint \frac{\phi}{r} \, ds$. В соответствии с нашим исходным предположением о том, что ϕ есть решение уравнения Лапласа, первый член обращается в нуль (см. задачу 2.7). Второй член есть $\varepsilon \oint \phi \, ds$, но по известной теореме о среднем

значении гармонической функции он равен $\varepsilon \oint \phi \, ds = 2\pi\phi(\xi, \eta)$.

Подставляя последнее равенство в исходное выражение, получаем

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \oint \left[\ln(r) \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} \right] ds. \quad (6.190)$$

Таким образом, решение уравнения Лапласа в некоторой области мы свели к задаче решения интегрального уравнения на границе этой области. Первый член соответствует задаче Неймана, в которой на границе задается $\partial \phi / \partial n$, второй — задаче Дирихле с краевым условием, когда на границе задается ϕ . Интегралы в равенстве (6.190) дают вклады в ϕ от источников и диполей. Далее можно записать

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \left[\mu \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} + \sigma \ln(r) \right] ds, \quad (6.191)$$

где σ можно интерпретировать как плотность распределения источников, а μ — плотность распределения диполей с осью, перпендикулярной к поверхности границы.

Поверхностное распределение источников с плотностью σ на

единицу длины дает во внешней точке величину потенциала

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \sigma \ln(r) ds, \quad (6.192)$$

где интегрирование производится по всей поверхности. Если мы имеем n поверхностей или панелей, суммарный потенциал в точке P есть сумма вкладов от каждой панели:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_j \sigma_j \ln(r_{ij}) ds_j. \quad (6.193)$$

Аналогичное выражение можно получить и для распределения диполей. Если в области, где имеются n панелей с распределенными источниками, существует еще и однородный поток, то с учетом его потенциала записываем

$$\phi_i = U_{\infty} x_i + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_j \sigma_j \ln(r_{ij}) ds_j. \quad (6.194)$$

Наиболее простое и удобное для проведения численных расчетов выражение получают в случае, когда интенсивности источников панелей полагаются постоянными. В более совершенных методах пользуются другими распределениями, и тогда выражение для потенциала скорости становится более сложным. Для постоянной интенсивности источников на панели имеем

$$\phi_i = U_{\infty} x_i + \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_j \ln(r_{ij}) ds_j. \quad (6.195)$$

Геометрия области, соответствующая такому распределению потенциала, показана на рис. 6.32. Далее необходимо определить интенсивности источников σ_j . Для этого на каждой панели выбирают контрольную точку и требуют, чтобы через панель поток отсутствовал. Контрольную точку выбирают в центре панели. Пусть точка P является контрольной точкой i -й панели. Условие отсутствия перетекания через панель в этой точке есть

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \phi(x_i, y_i) = 0. \quad (6.196)$$

Так как ϕ — потенциал скорости, то это равенство просто выражает факт обращения в нуль нормальной скорости в контрольной точке i -й панели. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n} \ln(r_{ij}) ds_j = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_i. \quad (6.197)$$

В правой части этого выражения стоит скалярное произведение, поскольку нас интересует только нормальная к поверхности компонента скорости. Скорость, индуцируемая в i -й контрольной точке i -й панелью, равна $\sigma_i/2$. Ее обычно выделяют из выписанной выше суммы. С учетом этого можно записать

$$\frac{\sigma_i}{2\pi} + \sum_{j \neq i}^n \frac{\sigma_j}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial n_i} \ln(r_{ij}) ds_j = -\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n}_i. \quad (6.198)$$

Записанные для каждой панели такие уравнения образуют систему из n алгебраических уравнений относительно n неизвестных интенсивностей источников. Вычислив σ_j , можно определить

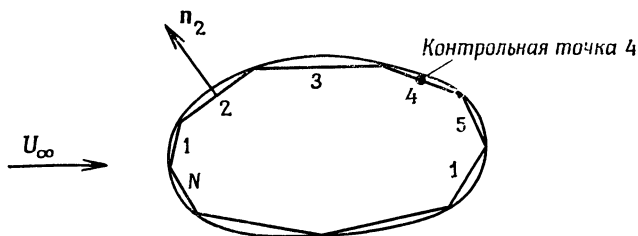


Рис. 6.32. Представление тела общей формы панелями.

коэффициенты давления. Когда для нахождения требуемых интенсивностей источников на панелях используется уравнение (6.198), подынтегральное выражение легко преобразуется к виду

$$\frac{\partial \ln(r_{ij})}{\partial n_i} = \nabla_i \ln(r_{ij}) \cdot \mathbf{n}_i. \quad (6.199)$$

В приведенном ниже примере показана процедура составления алгебраических выражений.

Пример 6.6. Пусть мы хотим при помощи панельного метода рассчитать давление на цилиндре единичного радиуса, обтекаемого несжимаемой жидкостью. Представим цилиндр восемь панелями, конфигурация которых изображена на рис. 6.33.

Для определения распределения давления на поверхности цилиндра нужно вычислить интенсивности распределенных по панели источников для всех восьми панелей. Для этого решают систему алгебраических уравнений, полученную при помощи записи уравнения типа (6.198) для каждой панели. При этом наибольшую трудность представляет вычисление члена с интег-

ралом. Обычно принято представлять интеграл через коэффициент влияния и записывать систему уравнений в виде

$$[C] \frac{\sigma}{2\pi U_\infty} = - \frac{U_\infty \cdot \mathbf{n}_i}{U_\infty}. \quad (6.200)$$

С учетом этого соглашения можно записать

$$c_{ij} = \int_i \nabla_i \ln(r_{ij}) \cdot \mathbf{n}_i ds_i, \quad i \neq j; \quad c_{ij} = \pi, \quad i = j. \quad (6.201)$$

Чтобы продемонстрировать применение уравнения (6.201), вычислим величину c_{53} , которая представляет собой нормальную скорость в контрольной точке панели 5, индуцируемую находя-

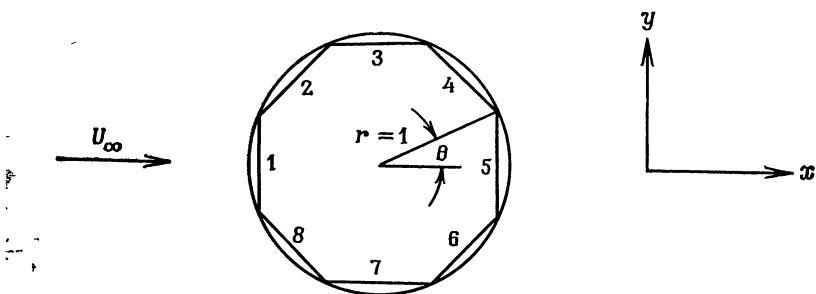


Рис. 6.33. Распределение панелей на цилиндре.

щимся на панели 3 источником с постоянной плотностью интенсивности $1/U_\infty$. В этом случае соответствующий радиус есть

$$r_{53} = [(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2]^{1/2}, \quad \nabla_5 \ln(r_{53}) = \frac{(x_5 - x_3) \mathbf{i} + (y_5 - y_3) \mathbf{j}}{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}. \quad (6.202)$$

Единичная нормаль к панели 5 есть просто направленный в сторону положительных x единичный вектор и

$$\nabla_5 \ln(r_{53}) \cdot \mathbf{n}_5 = \frac{x_5 - x_3}{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2}.$$

В рассматриваемом случае $x_5 = 0.9239$, $y_5 = 0$ и $y_3 = 0.9239$, если x_3 изменяется на панели 3. Тогда вычисляемый интеграл есть

$$c_{53} = \int_{-0.3827}^{+0.3827} \frac{0.9239 - x}{x^2 - 1.848x + 1.707} dx = 0.4018.$$

В этом выражении длина дуги вдоль панели 3 равна $x - 0.3827$, следовательно, $ds_3 = dx$, и мы можем принять координаты x концов панели за пределы интегрирования. Отметим также, что

интегрирование вокруг цилиндра ведется в направлении вращения часовой стрелки, которое является положительным для области, в которой мы ищем решение уравнения Лапласа. Матрица $[C]$ симметрическая, т. е. $c_{ij} = c_{ji}$, и решение для σ_i должно быть таким, чтобы

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i = 0.$$

Последнее требование очевидно, так как рассматриваемое тело является замкнутым.

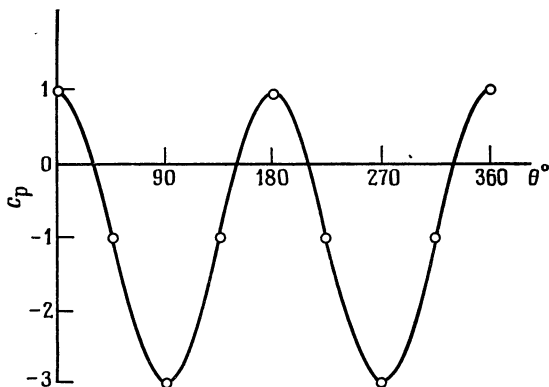


Рис. 6.34. Коэффициент давления c_p для кругового цилиндра; \circ панельный метод; — аналитическое решение.

На рис. 6.34 приведены аналитическое и восьмипанельное решения для коэффициента давления. Видно, что в данном случае панельный метод дает очень точное численное решение.

В нашем примере мы воспользовались панельным методом с распределенными источниками, чтобы показать, как применяется этот метод. Точно так же мы могли бы представить тело состоящим из панелей с распределенными диполями, равно как и из панелей с распределенными вихрями. Ясно, что при рассмотрении профилей с подъемной силой мы должны задавать циркуляцию. Это можно сделать разными способами, один из которых состоит в размещении панелей с распределенными вихрями вдоль средней линии профиля, что позволяет наложить циркуляцию и удовлетворить условию Жуковского — Кутты в контрольной точке сразу за выходной кромкой.

Панельные методы являются мощным средством решения некоторого класса задач обтекания. Они получили большое развитие, что вылилось в разработку большого количества стандартных

программ, которые широко применяются в промышленности. За подробностями мы отсылаем читателя к работе [Hess, Smith, 1967], в которой описаны основные идеи этих методов, а также к работам [Rubbert, Saaris, 1972; Johnson, Rubbert, 1975], в которых изложено дальнейшее их развитие.

Задачи

6.1. В примере 6.1 мы применили метод характеристик к решению задачи о сверхзвуковом обтекании волнистой стенки. Получите поле скорости, решая непосредственно уравнение Прандтля — Глауэрта (уравнение (6.1)).

6.2. Выведите уравнения характеристик нелинейной системы уравнений, записанных в прямоугольных координатах для двумерного сверхзвукового течения.

6.3. Уравнения характеристик из задачи 6.2 записаны в прямоугольных координатах. Преобразуйте этот результат, введя угол наклона линии тока θ , и покажите, что характеристики наклонены под локальным углом Маха, т. е. $\operatorname{tg} \theta \pm \mu = dy/dx$.

6.4. Получите уравнения совместности для нелинейных уравнений из задачи 6.2.

6.5. Воспользуйтесь результатами решения задач 6.2 и 6.4 и решите задачу из примера 6.1 методом характеристик для нелинейных уравнений.

6.6. Получите конечно-разностные уравнения в примере 6.3 и решите задачу из примера 6.1 методом расщепления матричных коэффициентов.

6.7. Вычислите T в примере 6.4. Уравнения легко численно интегрируются с использованием соответствующих односторонних разностей.

6.8. Составьте программу решения для сверхзвукового обтекания двумерного клина из примера 6.2. Решите стационарные уравнения методом сквозного счета, используя схему Мак-Кормака.

6.9. Решите предыдущую задачу, используя зависящие от времени уравнения и полагая течение коническим.

6.10. Составьте программу решения задачи 6.8, выделяя ударную волну. Используйте уравнения либо в дивергентной форме, либо в недивергентной.

6.11. Пусть твердая стенка расположена на луче $\theta = \text{const}$ (двумерная задача обтекания). Предложите подходящий способ определения параметров потока в фиктивных точках, используя принцип отражения. Используйте прямоугольную систему координат.

6.12. Предложите процедуру постановки граничных условий для задачи сверхзвукового обтекания клина, используя метод Кенцера.

6.13. Покажите, что уравнение (6.142) является разностным приближением второго порядка одномерного уравнения потенциала.

6.14. Покажите, что разностная аппроксимация уравнения (6.148) со смещенным шаблоном для плотности эквивалентна уравнению (6.147).

6.15. Вычислите правую часть уравнения (6.166).

6.16. Покажите, что уравнение (6.190) дает решение уравнения потенциала для несжимаемой жидкости.

6.17. Вычислите c_{43} из примера 6.6.

Оглавление

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	7
Часть 1. Основы методов конечных разностей	10
Глава 1. Введение	10
§ 1.1. Общие замечания	10
§ 1.2. Сравнение экспериментального, теоретического и вычислительного подходов	13
§ 1.3. Исторический обзор	18
Глава 2. Уравнения в частных производных	22
§ 2.1. Введение	22
§ 2.2. Физическая классификация уравнений	22
§ 2.3. Математическая классификация уравнений	29
§ 2.4. Корректно поставленные задачи	39
§ 2.5. Системы уравнений	41
§ 2.6. Другие представляющие интерес уравнения в частных производных	45
Задачи	46
Глава 3. Основы метода конечных разностей	49
§ 3.1. Введение	49
§ 3.2. Метод конечных разностей	49
§ 3.3. Конечно-разностная аппроксимация уравнений в частных производных	57
§ 3.4. Различные методы построения конечно-разностных схем	66
§ 3.5. Применение нерегулярных сеток	82
§ 3.6. Устойчивость конечно-разностных схем	87
Задачи	101
Глава 4. Применение метода конечных разностей для решения модельных уравнений	106
§ 4.1. Волновое уравнение	106
§ 4.2. Уравнение теплопроводности	131
§ 4.3. Уравнение Лапласа	147
§ 4.4. Уравнение Бюргерса (невязкое течение)	170
§ 4.5. Уравнение Бюргерса (вязкое течение)	189
§ 4.6. Заключительные замечания	207
Задачи	207

Часть 2. Применение методов конечных разностей к уравнениям гидродинамики и теплопередачи	216
Глава 5. Основные уравнения механики жидкости и теплообмена	216
§ 5.1. Основные уравнения	216
§ 5.2. Уравнения Рейнольдса для турбулентных течений	234
§ 5.3. Уравнения пограничного слоя	246
§ 5.4. Введение в моделирование турбулентности	260
§ 5.5. Уравнения Эйлера	279
§ 5.6. Преобразование основных уравнений	291
Задачи	300
Глава 6. Численные методы решения уравнений сечения невязкой жидкости	303
§ 6.1. Введение	303
§ 6.2. Метод характеристик	304
§ 6.3. Методы сквозного счета	316
§ 6.4. Метод расщепления матричных коэффициентов	335
§ 6.5. Методы решения уравнения потенциала	352
§ 6.6. Уравнения малых возмущений для трансзвуковых течений	371
§ 6.7. Методы решения уравнения Лапласа	375
Задачи	382

Содержание т. 2

Глава 7. Численные методы решения уравнений типа уравнений пограничного слоя

Глава 8. Численные методы решения параболизированных уравнений Навье — Стокса

Глава 9. Численные методы решения уравнений Навье — Стокса

Глава 10. Методы построения расчетных сеток

Приложение А. Подпрограмма решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей.

Приложение В. Подпрограмма решения системы уравнений с блочной трехдиагональной матрицей.

Приложение С. Модифицированный сильно неявный метод.

Обозначения

Литература

Именной указатель

Предметный указатель